

Zadaci sa prijemnog ispita održanog 7.9.2018. sa rješenjima

1. Riješiti sistem jednačina

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$$

$$x + y = -2$$

Rješenje: Iz druge jednačine sistema zaključujemo da je $y = -2 - x$ pa uvrštavajući ovo u prvu jednačinu dobijamo $x^2 + (x + 2)^2 - 2x - 2(x + 2) = 2$. Dalje je $x^2 = 1$ pa je $x = 1$ ili $x = -1$. Za $x = 1$ dobijamo da je $y = -3$, za $x = -1$, $y = -1$. Konačno, rješenje sistema je skup $\{(1, -3), (-1, -1)\}$.

2. Dat je skup funkcija
- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- , (
- $a, b, c \in \mathbb{R}$
-). Odrediti koeficijente
- a, b, c
- tako da vrijedi

$$f(0) = 4, \quad f(-3) = -20, \quad f(1) = 4,$$

a zatim skicirati grafik te funkcije.

Rješenje:

$$f(0) = 4 \implies c = 4$$

$$f(-3) = -20 \implies 9a - 3b + c = -20$$

$$f(1) = 4 \implies a + b + c = 4$$

Sada dobijamo da je $a = -2$ i $b = 2$ pa je funkcija koja zadovoljava navedene uslove $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$. Nule ove funkcije su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Tjeme parabole koja predstavlja grafik ove kvadratne funkcije je $T(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$.

3. Riješiti jednačinu
- $|1 - x| + 2|x - 3| = 3x + 2$
- .

Rješenje:

$$x \in (-\infty, 1) \implies 1 - x - 2(x - 3) = 3x + 2 \implies 6x = 5 \implies x = \frac{5}{6} \in (-\infty, 1)$$

$$x \in [1, 3) \implies x = \frac{3}{4} \notin [1, 3)$$

$x \in [3, +\infty) \implies -7 = 2$ što je netačna jednakost pa u ovom intervalu nema rješenja jednačine. Dakle, jedino rješenje jednačine je $x = \frac{5}{6}$.

4. Ako se jedna stranica pravougaonika poveća za 20%, a druga smanji za 20%, površina pravougaonika će:

a) ostati nepromijenjena b) povećaće se za 4% c) smanjiće se za 4% d) smanjiće se za 10%.

Zaokružiti tačan odgovor i obrazložiti.

Rješenje:

$P = ab$ površina pravougaonika. $P_1 = 1.2a \cdot 0.8b = 0.96ab = \frac{96}{100}P$. Dakle površina pravougaonika će se smanjiti za 4% pa je tačan odgovor (c).

5. Odrediti kompleksne brojeve
- $z = x + iy$
- tako da vrijedi

$$2z(1 - 2i) - i(1 - \bar{z}) = 3 - 5i$$

Rješenje:

$$2(x + iy)(1 - 2i) - i(1 - x + iy) = 3 - 5i \implies (2x + 5y) + i(-3x + 2y - 1) = 3 - 5i.$$

Gornja jednakost kompleksnih brojeva nam daje sistem

$$2x + 5y = 3$$

$$-3x + 2y - 1 = -5$$

čijim rješavanjem dobijamo da je $x = \frac{26}{19}$ i $y = \frac{1}{19}$ pa je $z = \frac{26}{19} + \frac{1}{19}i$.

6. Dokazati identitet

$$\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

Rješenje:

Na osnovu adicijinih formula dobijamo

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x).$$

Sada je

$$\begin{aligned} \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) + \sin^2(x - \frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)^2 + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)^2 = \\ &= \frac{1}{2}(2 + 2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x) = 1. \end{aligned}$$

7. Riješiti nejednačinu $(\frac{1}{5})^{3x-1} > 25$.

$$\text{Rješenje: } (\frac{1}{5})^{3x-1} > (\frac{1}{5})^{-2} \implies 3x - 1 < -2 \implies x < \frac{-1}{3}.$$

8. Riješiti jednačinu $\log_5(x+2) + \log_5(4-x) = 1$.

Rješenje: Uslov zadatka je: $x+2 > 0 \wedge 4-x > 0$ tj. $x \in (-2, 4)$.

$$\log_5(x+2)(4-x) = \log_5 5 \implies -x^2 + 2x + 8 = 5 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Dakle, $x \in \{-1, 3\}$.

9. U kružnicu poluprečnika r je upisan jednakostranični trougao. Izračunati dužinu njegove stranice, obim i površinu.

$$\text{Rješenje: } a = \sqrt{3}r, O = 3\sqrt{3}r, P = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}.$$

10. Napisati jednačinu prave koja prolazi kroz tačku $C(1, 2)$ i paralelna je pravoj koja je određena tačkama $A(-3, -2)$ i $B(4, 0)$.

Rješenje: $AB : y = \frac{2}{7}(x-4)$ jednačina prave kroz tačke A i B . Koeficijent pravca prave čija se jednačina traži je jednak koeficijentu pravca prave AB jer su spomenute prave paralelne. Tražena jednačina je $y - 2 = \frac{2}{7}(x - 1)$. Zapisana u implicitnom obliku jednačina prave je $2x - 7y + 12 = 0$.