Школска година: **2017/18**

Универзитет у Бањој Луци
Машински факултет
Субјект: ***Пријемни испит* (26.06.2017.)**

РЈЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА

Задатак 1. Дата је изјава: *Ако на пријемном испиту не освојим минимално 15 бодова, онда се не могу уписати на Машински факултет.*

Одговори са 'да' ако је ова изјава еквивалентна слиједећој изјави, а са 'не' ако нису еквивалентне.

(а) *Нећу се моћи уписати на Машински факултет, ако на пријемном испиту не освојим минимално 15 бодова.* **ДА**; НЕ; Незнам.

(б) *Ако се упишем на Машински факултет, онда сам на пријемном испиту освојио минимално 15 бодова*. **ДА**; НЕ; Незнам.

Рјешење: Словом $\boldsymbol{A}$ означимо изјаву: *На пријемном испиту освојио сам минимално 15 бодова*. Словом $\boldsymbol{B}$ означимо изјаву: *Могу се упитати на Машински факултет*. Симболом '¬' означимо логичку везу негације. Тада наша дата изјава има облик импликације:

$$\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \neg \boldsymbol{B}.$$

Ријечима: *Ако није тачо да сам на пријемном испиту освојио / освојила минимално 15 бодова, онда није тачно да се могу уписати на Машински факултет*.

Формула на лијевој страни импликације је *хипотеза* или *претпоставка*. Формула на десној страни импликације је *последица* или *консеквент*. Дакле, импликације се разумијева на слиједећи начин: *Из хипотезе слиједи консеквент* или *Из претпоставке слиједи закључак* или *Из узрока слиједи последица*.

Контрапозиција претходне изјаве (Елементи математичке логике који се корисе у овом задатку учи се у првом разреду средње школе.) је слиједећа изјава

$$\neg\neg \boldsymbol{B} \Rightarrow \neg\neg \boldsymbol{A}.$$

Односно, због закона о двострукој негацији: *Двострука негација је еквивалентна афирмацији*., слиједи

$$\boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{A}.$$

Ријечима: *Ако се упишем на Машински факултет, одна сам на пријемном испиту освојио / освојила минимално 15 бодова*.

Према томе, изјаве (б) је логички еквивалентна полазној изјави.

У складу са могућностима Српског језика, у реченици (б) последица се налази на првом мјесту, а узрок на другом мјесту. То је инверзија полазне реченице. То се препознаје посредством ријечи 'ако' којом почиње други дио реченице (а) и зарезом испред ње. Дакле, ова изјава је, у логичком смислу, једнака полазној изјави. Према томе, и изјава (а) је еквивалентна полазној изјави. ♦

Коментар уз задатак 1. Понуђена рјешења овог задатка омогућавају испитивачу да направи први дјелимични увид у досегнути ниво развоја логичког мишљења тестираних кандидата. Од тестираних кандидата се очекује да препознају, разумију и знају употребљавати *основне логичке концепте* (на примјер: терме: *варијабле и константе*, *изјаве / формуле*, логичке везе *импликације* и *негације*) и елементарне процесе са њима (на примјер: *принцип искључења трећег*, *принцип неконтрадикције*, *контрапозицију*, *принцип двоструке негације*).

Задатак 2. Која од слиједећих тврдњи је (потпуно) тачна (*заокружи*): **(а)** Правоугаоник је четвоространик са правим угловима; **(б)** Правоугаоник је паралелограм са правим угловима; (в) Правоугаоник је многостраник који има четири странице и четири права угла.

Рјешење: *Четвоространик* је многостраник са четри странице. Дакле, концепт *многостраника* претходи увођењу концепта четвоространика. Са појмом многостраника ученици се упознавају у другом разреду основне школе. Многостраник је *затворена изломљена линија*. Двије или више дужи повезане тако да се почетна тачка слиједеће дужи подудара са крајњом тачком претходне дужи чини *изломљену линију*. Изломљена линије *је затворена* ако се завршна тачка те комплетне линије *подудара* са почетном тачком. Концепти који претходне увођењу и дескрипцији геометријске фигуре 'изломљена линија' су: дуж, почетна тачка, завршна тачка и релација 'подударати'. Дужи које чине затворену изломљену линију су *странице* тог многостраника. Многостраник са три / четири / пет / ... страница је тространик / четвороcтраник / петоространик / ... (Термин 'многостраник' базиран је на препознавању и ослањању на термин 'дуж' / 'страница' који му претходи. У српском језику чешће је у употреби термин 'многоугао' иако је термин 'угао', на који се ослања ова детерминација, когнитивно комплекснија од термина 'страница'.) Компоненте четвоространика су: четири *тјемена*, четири *странице* и четири *унутрашња угла.*

Четвороcтранике класификујемо према слиједећим критеријима:

(ПС) *Број парова паралелних страница четвоространика*:

ПС0: Четвоространик нема паралелних страница;
ПС1: Четвоространик има један пар паралелних страница (*трапези*);
ПС2: Четвоространик има два пара паралелних страница (*паралелограми*).

(ПУ) *Број правих углова у четвоространику*:

ПУ0: Четвоространик нема прави угао;
ПУ1: Четвоространик има један прави угао;
ПУ2: Четвоространик има два права угла; и
ПУ4: Четвоространик има четри права угла (*правоугаоници*).

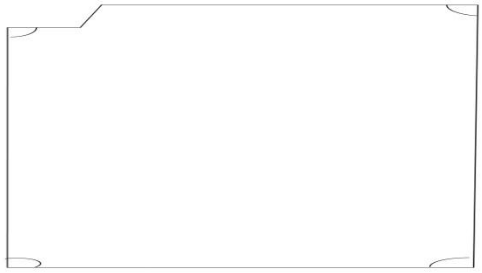
(СС) *Међусобни однос сусједних страница четвоространика*:

СС0: Четвоространик нема једнаких сусједних страница;
СС1: Четвоространик има један пар једнаких сусједних страница;
СС2: Четвоространик има два пара једнаких сусједних страница (*делтоиди*).

Може се провјерити да је сваки правоугаоник истовремено и паралелограм. Обрнуто не мора бити: Има паралелограма који нису правоугаоници. На примјер, *ромб* и *ромбоид* код којих унутрашњи углови нису прави су паралелограми али нису правоугаоници. Дакле, паралелограм је правоугаоник ако си му унутрашњи углови прави. Из изложеног дедукујемо:

Правоугаоник је паралелограм код кога су унутрашњи углови прави.
Правоугаоник је четвоространик који има четири права унутрашња угла.

Одговор (в) не садржи захтјев да је тражена фигура четвоространик. Понуђени одговор је прилика да се прокоментарише захтијев да тражена фигура мора бити четвоространик. Ниже је изложена фигура која садржи четири странице и четири права угла а није правоугаоник.



Фигура 2. Многостраник који садржи четири странице и четири права угла а није правоугаоник

Сем тога, ова фигура има два пара паралелних страница. Из изложеног се може дедуковати:

Правоугаоник је многостраник који има 'само' четири странице и четири права угла.

♦

Коментар уз задатак 2. Понуђена рјешења овог задатка омогућавају испитивачу да направи први дјелимични увид у досегнути ниво развоја геометријског мишљења тестираних кандидата. Од тестираних кандидата се очекује да препознају, разумију и знају описати елементарне геометријске концепте. Очекује се да когнитивна раван тестираних кандидата буде процијењена минимално на 'нивоу 2' по ван Хиелеовој класификацији.

Задатак 3. За скупове A = {2, 4, 6, 8, ...}, B = {4, 8, 12, 16, ...} одредити: (а) $A \cup B$ (0.5 бод); (б) $A \cap B$ (0.5 бод); (в) $A \setminus B$ (0.5 бод); (г) $B \setminus A$ (0.5 бод); (д) $A \times B$ (1 бод); (ђ) A^c (1 бод); (е) A^B (1 бод).

Рјешење: Скуп A се састоји од парних природних бројева: 2, 4, 6, 8, тако даље...

$$A = 2\boldsymbol{N} = \{x \in \boldsymbol{N}: (\exists u \in \boldsymbol{N})(x = 2u)\}.$$

Скуп B се састоји од природних бројева: 4, 8, 12, 16, и тако даље. Дакле, скуп B се састоји од природних бројева који су дјељиви са 4

$$B = 4\boldsymbol{N} = \{y \in \boldsymbol{N}: (\exists v \in \boldsymbol{N})(y = 4v)\}.$$

(а) $A \cup B = \{2,4,6,8, \ldots\} \cup \{4,8,12,16,\ldots\} = \{2,4,6,8, \ldots\}$ јер је скуп B подскуп скупа A.

(б) $A \cap B = B$ јер је скуп B подскуп скупа A.

(в) $A \setminus B = \{2,6,10,14, \ldots\} = \{z \in \boldsymbol{N}: (\exists u \in \boldsymbol{N})(z = 2u) \wedge \neg (\exists v \in \boldsymbol{N})(z = 4v)\}$.

(г) $B \setminus A = \varnothing$ јер је скуп B подскуп скупа A.

(д) Скуп $A \times B$ је директни (Декартов) производ скупова A и B и састоји се од свих уређених парова $(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ при чему је $x \in A$ а $y \in B$. Дакле,

$$A \times B = \{(2,4), (2,8),(2,12), (2,16), \ldots;(4,4),(4,8),(4,12),(4,16), \ldots; (6,4),(6,8),(6,12), (6,16) ,\ldots\}.$$

(ђ) Скуп $A^c = \boldsymbol{N} \setminus A$ је комплемент скупа A у односу на скуп $\boldsymbol{N}$. Дакле, A = {1,3,5,7, …} и састоји се само од непарних прородних бројева.

(е) Скуп се састоји од свих функција из скупа B у скуп A.

♦

Коментар уз задатак 3. Понуђена рјешења овог задатка омогућавају испитивачу да направи увид у досегнути ниво развоја скуповно-релацијског мишљења тестираних кандидата. Од тестираних кандидата се очекује да препознају, разумију и знају описати елементарне концепте Теорије скупова. Елементи Наивне теорије скупова уче се у првом разреду средње школе. Очекује се да кандидати препознају, разумију и знају употребњавати основне скуповне концепте (начин записивања и препознавања тог начина детерминисања скупова; посебно, препознавање употребе терма '...' – три водоравне тачке), операције са скуповима: уније, пресјека, разлике скупова, директног производа скупова, комплемент скупа али и неке процесе са скуповима, као на примјер у Питању (е) овог задатка, са функцијама из скупа B у скуп A.

Задатак 4. Када користимо taxi, плаћамо ’полазни тошак’ у износ од 2.00 КМ и 0.60 КМ по пређеном километру. Одговорите на слиједећа питања: (**4.1**) Од чега зависи трошак јендог кориштења taxi-a? (0.5 бод) (**4.2**) Ако платимо y КМ за једно кориштење taxi-a, при пређених x колометара, прикажи y као функцију величине x. (0.5 бод) (**4.3**) Направи кратку табелу међуовисности величина x и y. (1 бод) (**4.4**) Ако је за једно кориштење taxi-a плаћено 10 КМ, колико километара је пређено? (1 бод) (**4.5**) Ако је при кориштењу taxi-a taxi-шоферу дато 10 КМ, које све могуће рате су плаћене, и колико је кусур при свакој од тих рута? (2 бода)

Рјешење:

(4.1) Трошак јендог кориштења taxi-a очигледно зависи од 'полазног трошка' и броја пређених километара.

(4.2) Функционална веза која повезује укупан трошак y (у КМ) кориштења taxi-a при пређених x колометара је

$$y = 2 + 0.6 \cdot x.$$

(4.4) Да би израчунали колико километара је пређено ако је за једно кориштење taxi-a плаћено 10 КМ, треба да ријешимо једначину

$$10 = 2 + 0.6 \cdot x$$

Даље, имамо

$$x = 8 : 0.6 \approx 13.33...$$

(4.5) Ако је при кориштењу taxi-a taxi-шоферу дато 10 КМ, могуће руте, тј. број x пређених километара, које су плаћене добијају се рјешавањем слиједеће неједначине

$$10 \geq 2 + 0.6 \cdot x.$$

Дакле, 'кусур' z је

$$z = 8 - 0.6 \cdot x$$

при чему је x рјешење горње неједначине. Дакле

x може бити 1 (z = 7.4 КМ), 2 (z = 6.8 КМ), 3 (z = 6.2 КМ), ..., 13 (z = 0.2 КМ).

♦

Напомена. Овај познати задатак, тзв. 'taxi-проблем' пружа изванредну прилику за процјењивање досегнутог (вишег) нивоа алгебарског мишљења кандидата. Препознавање линеарне функције, њених својстава али и експонираним вјештина рјешавања припадних линеарних алгебарских једначина и неједначина сматра се неопходно потребним елементима вишег алгебарског мишљења којима би требало да кандидати владају будући да су ('официјелно' успјешно) окончали више разреде основне школе.

Задатак 5. Ријешити систем једначина $y = 2x - 3$ и $2x^2 - y^2 - 3x - yx = -1$ по варијаблама x и y у скупу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева.

Рјешење: Ако другу једначину трансформишемо у облик $x(2x - 3) - y^2 - yx = -1$, онда се она, због $y = 2x - 3$ трансформише у облик $y^2 = 1$. Дакле, рјешења су посматраног система једначина су

$y = -1$ или $y = 1$.

Дакле, једно рјешење, $y = 1$, је у скупу $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, а друго, $y = -1$, је у скупу $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

♦

Задатак 6. Ријешити по x једначину $2^{x+1} - 2^{2-x} + 7 = 0$. (4 бода) Којим скуповима бројева припада добивено рјешење (*заокружи*): (а) Скупу $\boldsymbol{N}$ природних бројева; **(б)** Скупу $\boldsymbol{Z}$ цијелих бројева; **(в)** Скупу $\boldsymbol{Q}$ рационалних бројева; **(г)** Скупу $\boldsymbol{R}$ реалних бројева? (1 бод)

Рјешење: Послије малих алгебарских трансформација превођењем смјеном $2^x = t$ ове једначине на квадратну јеначину, добијају се рјешења $t =- 4$ или $t = \frac{1}{2}$. Како $2^x = -4$ није могуће у скупу реалних бројева, из $2^x = \frac{1}{2}$ добијамо $x = -1$. Очигледно, ово рјешење је у скуповима $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

♦

Задатак 7. Једначина праве која пролази тачкама $A = (1,-1)$ и $B = (3,3)$ је (*заокружи тачан одговор*):

(а) $2x - y - 3 = 0$; (б) $-3x + y + 4 = 0$, (в) $y = x + 1$.

Рјешење: једначина праве (у равни) која пролази дијема заданим тачкама (x_1,y_1) и (x_2,y_2) гласи

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1) \quad \text{или} \quad y - y_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_2).$$

Дакле,

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{3+1}{3-1}(x - 1)$$

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

$$2x - y - 3 - 0 .$$

♦

Задатак 8. Ријешити неједначине:

(а) $-2 \cdot x \geq 12$ (1 бод), (б) $-3 \cdot (x-1) < 6$ (1 бод), (в) $-4 \cdot (x-1)^2 < 6$ (3 бода). .

Рјешење:

(а) $-2 \cdot x \geq 12$,

$-2 \cdot x \geq 12 \;\big|: (-2)$

$x \leq -\frac{12}{2} \quad \in \boldsymbol{N}$

$x \in <-\infty, -6]$

(б) $-4 \cdot (x-1) < 6$.

$-4 \cdot (x-1) < 6 \;\big|: (-4)$

$x - 1 > -\frac{6}{4} \quad \in \boldsymbol{Q}$

$x > 1 - \frac{6}{4} = -\frac{1}{2}$

$x \in <-\frac{1}{2}, +\infty>$

(в) $-4 \cdot (x-1)^2 < 6$

$-4 \cdot (x-1)^2 < 6 \;\big|: (-4)$

$(x - 1)^2 > -\frac{6}{4}$

Будући да је терм $(x - 1)^2$ позитиван за свако, ма како изабрано $x \in \boldsymbol{R}$, рјешење ове неједначине је интервал $<-\infty, +\infty>$

♦

Задатак 9. 588 путника мора се превести из једног мјеста у друго ради чега ће путници користити два различита воза. Једна композиција садржи само вагоне од 12 мјеста, док се у другој композицији налазе само вагони са 16 мјеста. Претпоставимо да овај последњи воз има осам вагона више него прва композиција. Колико вагона најмање треба да имају обје композиције да би се сви путници превезли? (*Обавезно образложи свој одговор*)

Рјешење: Означимо са x број вагона прве композиције, а са y означимо број вагона друге композиције. Према условима задатка, имамо:

$x, y \in \mathbf{N}$
$12x + 16y \geq 588$
$y = x + 8$

Ако из (друге) једначине вриједност варијабле y уврстимо у (прву) неједначину, добијамо

$12x + 16(x + 8) \geq 588$
$12x + 16x + 128 \geq 588$
$28x \geq 588 - 128 = 460$
$x \geq 460 : 28 \approx 16.4257...$
$x \geq 17$

Ако је $x = 17$ број вагона првог воза, тада је $y = x + 8 = 17+8 = 25$ број вагона другог воза. Дакле, оба воза могу превести $12 \cdot 17 + 16 \cdot 25 = 204 + 400 = 604$ путника што је више од потребник 588 мјеста за 16 мјеста тј. више је за један читав вагон друге композиције.

Напомена. Ако би смањили другу композицију за 1 вагон, према условима задатка смањили би и прву композицију такође за 1 вагон. У овом случају број мјеста би био

$$12 \cdot (17-1) + 16 \cdot (25-1) = 192 + 384 = 576$$

што је недовољно за превоз свих питника. Дакле, иако би концепт 'прва композиција од 17 вагона и друга композиција од 24' био довољан за превоз свих 588 путника јер је

$$12 \cdot 17 + 16 \cdot 24 = 204 + 384 = 588$$

рјешење $x = 17$ и $y = 24$, овог задатка ипак није прихватљиво јер је $17+8 = 25 \neq 24$.

♦

Коментар уз Задатак 9. Задатак овог типа је нелинеарно сложени аритметички задатак. Будући за његово рјешавање захтијева разумијевање концепта *'математичког окружења'* и концепата *'једначина и неједначина'* поступак рјешавања задатка благо приближава овај задатак домени алгебре. Зато је разврстан у категорију аритметичко-раноалгебарских задатака. Типови ових задатака су класични задаци унутар Теорије реалистичког математичког образовања. Зато се очекивала висока успјешност у понуђеним одговорима на ово питање. Осим поступка моделирања, тј. превођења контекста у математички систем једне неједначине и једне једначине у полупрстену природних бројева требало је узимати у обзир и услове (*друга композиција има 8 вагона више од прве композиције*) под којима је требало пронаћи рјешење проблема. Наравно, рјешавање овог проблема спада у уни-структуралну ниво.

Задатак 10. За боцу и запушач је плаћено 11 КМ. Колико је плаћен запушач, ако је боца скупља за 10 КМ од запушача?

Рјешење: Ако уведемо ознаке боца = b и запушач = z, тада према условима задатка имамо треба ријешити систем једначина

$$b+z = 11 \text{ KM}, \quad b = z + 10 \text{ KM}.$$

Одавде

$$(z+10\text{ KM})+z = 11\text{ KM}$$

односно

$$2z = 1\text{ KM}.$$

Дакле, зашушач боце кошта 0.5 КМ.

♦

Коментар уз Задатак 10. Овим задатком, а посебно рјешењима овог задатка које нуде студенти, добро се илуструје однос између *интуитивног приступа* рјешавању задатака и *аналитичког приступа* рјешавању задатака.

Задаци овог типа, унутар Теорије реалистичког математичког образовања, омогућавају установљавање приступа сагледавања проблема са којима се кандидати сусрећу. Овај задатак је аритметички задатак ниске сложености – то је линеарно сложени задатак. Његов дизајн омогућава сагледавање начина на који кандидати приступају аритметичким проблемима: да ли проблему приступају аналитички или интуитивно. Наравно, прво треба извршити поступак 'ленеарне математизације, тј. треба моделитари проблем, осносно „превести га" из контекстуалне приче у математички задатак (систем једначина) а потом провести ветрикалну математизацију, тј. ријешти припадни систем линеарних јендачина. Поента са оваквим приступом рјешавању проблема није у понуђеном погрешном рјешењу проблема већ у увјерењу кандидата да својим стеченим компетенцијама могу да пронађу рјешење без претходног промишљања. Овакав приступ проблемима, тзв. интуитиван приступ, сугерише нам да неке од усвојених социо-математичких норми које се односе на вјештине рјешавања проблема нису у складу са општеприхваћеним циљевима образовања.