УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2022/2023

ТЕМА 6: РЕДОВИ

6.1. Нумерички редови

4.2. Функционални редови

4.3. Степени редови

4.4. Тејлоров ред

ЛИТЕРАТУРА: **Биљана Војводић, Владимир Владичић: Математика II, Машински факултет, Бања Лука, 2022**

НАСТАВНИК: **проф. др Биљана Војводић**

ТЕМА 6: РЕДОВИ

5.1. НУМЕРИЧКИ РЕДОВИ

6.1.1. Појам и особине нумеричког реда

Сабирање реалних бројева је асоцијативна операција и вриједност израза $a + b + c$ не зависи од редослиједа операција, тј. $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$. Слично, вриједност збира коначно много бројева $a_1 + \cdots + a_n$ је јасно дефинисана и не зависи од редослиједа операција. Ова недвосмисленост у одређивању збира омогућава коришћење једноставнијег записа

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Природно се поставља питање: да ли је могуће одредити збир бесконачно много сабирака или да ли тај збир уопште постоји? Настојање да се одговори на ова и друга сродна питања, доводи до појма реда реалних бројева или нумеричког (бројног) реда.

Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ низ реалних бројева. Израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{6.1}$$

се назива **ред реалних бројева** (краће **реални ред** или само **ред**). [1]

[1] Ово није строга математичка дефиниција пошто одређивање збира бесконачно реалних бројева (6.1) није претходно дефинисано. Дефиниција реда се може формулисати и на друге начине, али у наставку користимо само наведену неформалну дефиницију

Низ реалних бројева (a_n) називамо **општи члан** реда (6.1).

Примјер 6.1. Ред

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

је ред чији је општи члан низ који је задат формулом $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $n\in\mathbb{N}$. Записујемо га у облику

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.\quad \lozenge$$

Општи члан реда генерише низ реалних бројева (s_n)

$$s_1=a_1,\qquad s_2=a_1+a_2,\dots,\qquad s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\dots$$

који називамо **низ парцијалних сума** реда (6.1).

Помоћу низа парцијалних сума долазимо до одговора на питање да ли збир бесконачно много сабирака постоји и чему је једнак уколико постоји.

Дефиниција 6.1. *Ако постоји коначна гранична вриједност низа парцијалних сума* (s_n) *и ако је* $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$, *тада кажемо да ред* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ***конвергира*** *и да му је* ***збир (сума)*** *једнак* s. *У том случају пишемо*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=s.$$

Када за низ парцијалних сума вриједи $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ тада користимо запис

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

За ред који није конвергентан (било да је $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$ или да не постоји гранична вриједност низа парцијалних сума) кажемо да је **дивергентан.**

У претходним разматрањима претпостављали смо да је низ који представља општи члан реда дефинисан на $\mathbb{N}$. На потпуно исти начин се може посматрати случај када је низ који представља општи члан реда дефинисан на неком бесконачном подскупу скупа $\mathbb{N}$ или скупа $\mathbb{N}_0$. [2]

Примјер 6.2. а) Општи члан реда из Примјера 6.1 се може записати у облику

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Низ парцијалних сума је

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

[2] Нпр. ако је општи члан реда низ $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ тада посматрамо ред $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, или ако је општи члан низ $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, тада посматрамо ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Према томе,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

па је ред конвергентан и збир му је једнак 1. Пишемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

б) Посматрајмо ред

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Примјећујемо да за низ парцијалних сума овог реда вриједи

$$s_n = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k+1}{k} = \sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln k) =$$

$$\ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1) - \ln 2.$$

Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln 2) = +\infty$$

па је ред дивергентан. ◊

Примјер 6.3. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots +, \qquad q \neq 0$$

се назива **геометријски ред**.

Парцијалне суме овог реда су

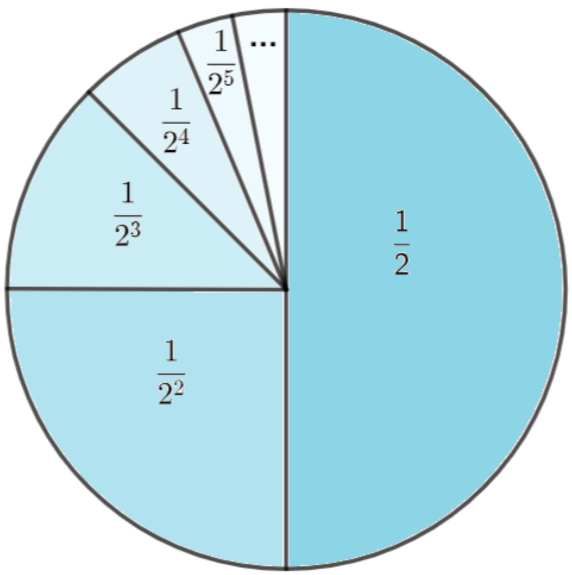
$$s_n = q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{q - q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \\ n, & q = 1 \end{cases}.$$

Одавде добијамо

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{q}{1-q}, \qquad |q| < 1$$

па је геометријски ред за $|q| < 1$ конвергентан и сума му је

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \qquad |q| < 1. \tag{6.2}$$



Слика 6.1.

Нпр. за $q = 1/2$ из (6.2) добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

и једна геометријска интерпретација овог резултата је дата на Слици 6.1.

За $q \geq 1$ је $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ па је ред дивергентан.

За $q \leq -1$, не постоји $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и ред је дивергентан.

За $|q| < 1$ такође можемо посматрати ред

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n, \quad n_0 \in \mathbb{N}_0.$$

Уочавамо да тада вриједи

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \sum_{k=1}^{\infty} q^{n_0+k-1} = q^{n_0-1}\sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

па је на основу (6.2)

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}, \quad |q| < 1. \quad \lozenge \tag{6.3}$$

Примјер 6.4. Одредити суме сљедећих геометријских редова (уколико су конвергентни):

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, в) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Рјешење: а) $q = 2$, ред дивергира.

б) $q = \frac{1}{3}$, ред конвергира. За одређивање суме реда користимо (6.3) за $n_0 = 0$ и добијамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

в) $q = -\frac{1}{2}$, $|q| < 1$ па ред конвергира. Из (6.3) за $n_0 = 3$ добијамо

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}. \quad \lozenge$$

Већ смо напоменули да поред реда који је дат са (6.1), можемо посматрати и ред чији је општи члан дефинисан за $n > m$, гдје је m фиксиран природан број, тј. ред

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m+k}\,, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

Ред r_m се назива **остатак** реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ послије m −тог члана.

Однос између конвергенције реда и његовог остатка даје сљедећа теорема.

Теорема 6.1. *1) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако конвергира његов остатак r_m.*

2) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако његов остатак има особину $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$.

Доказ: 1) Нека је

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и

$$s_k' = a_{m+1} + a_{m+2} + \ \ldots . + a_{m+k}$$

парцијална сума његовог остатка r_m. Очигледно је

$$s_k' = s_{m+k} - s_m. \tag{6.5}$$

Ако конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тада је $\lim\limits_{k\to\infty} s_{m+k} = s$. Тада из (6.5) добијамо

$$\lim_{k\to\infty} s_k' = s - s_m$$

па је и ред r_m конвергентан.

Обрнуто, ако је ред r_m конвергентан, тада је $\lim_{k\to\infty} s'_k = s'$. Сада из (6.5) добијамо

$$\lim_{k\to\infty} s_{m+k} = s' + s_m$$

па је и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан.

2) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можемо записати у облику

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_m + r_m.$$

Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан, тада је

$$r_m = s - s_m.$$

Одавде добијамо

$$\lim_{m\to\infty} r_m = \lim_{m\to\infty} (s - s_m) = 0. \ \square$$

Из Теореме 6.1 закључујемо да **је питање конвергенције реда еквивалентно питању конвергенције његовог произвољног остатка. Другим ријечима, коначно много елемената општег члана не утиче на конвергенцију реда.**

Пошто је конвергенција реда дефинисана помоћу конвергенције низа парцијалних сума, критеријуми за конвергенцију низова се преносе и на конвергенцију редова. Из Кошијевог критеријума за конверегенцију низа[3] долазимо до потребних и довољних услова за конвергенцију реда.

[3] Низ (c_n) реалних бројева је Кошијев ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0) \Rightarrow |c_m - c_n| < \varepsilon$$

Сваки конвергентан низ је Кошијев, а у $\mathbb{R}$ вриједи и обрнуто: сваки Кошијев низ конвергентан.

Теорема 6.2. (Кошијев критеријум конвергенције) *Ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира ако и само ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такво да вриједи*

$$(\forall n, p \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \Rightarrow \left|s_{n+\mathrm{p}} - s_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}\right| < \varepsilon. \qquad (6.6)$$

Примјер 6.5. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Рјешење: Имамо да је

$$0 < s_{n+\mathrm{p}} - s_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq$$
$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$
$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Пошто је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, закључујемо да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$(\forall n > n_0) \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Према томе вриједи

$$(\forall n, p \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \ \left|s_{n+\mathrm{p}} - s_n\right| < \varepsilon,$$

па је на основу Кошијевог критеријума конвергенције ред конвергентан. ◊

У наставку посматрамо редове чији је општи члан линеарна комбинација општих чланова датих редова.

Теорема 6.3. *1) Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, онда конвергира и ред* $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *и вриједи*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2) Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *конвергирају, онда конвергира и њихов збир* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *и вриједи*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказ: Слиједи директно из особина граничних вриједности низова. □

Потребан услов за конвергенцију реда је да његов општи члан тежи нули.

Лема 6.1. *Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, онда је*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказ: Из једнакости

$$a_n = s_n - s_{n-1}, \qquad n > 1$$

добијамо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \ \square$$

Примједба 6.1. Услов $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ је потребан али не и довољан за конвергенцију реда. Дакле, ако општи члан реда не тежи нули, ред је дивергентан, а уколико општи члан тежи нули, ред може да буде и конвергентан и дивергентан. Тако је за редове из Примјера 6.2 испуњен услов $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ јер је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$, али је ред са општим чланом $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}$ конвергентан, а ред са општим чланом $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$ дивергентан.

Примјер 6.6. а) За ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

је испуњен потребан услов за конвергенцију, тј. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Међутим, овај ред је дивергентан јер је

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

па је $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

б) За ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

није испуњен потребан услов за конверегенцију јер је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, па је ред дивергентан.◊

6.1.2. Редови са позитивним члановима

Ако општи члан реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ има особину да је

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n > 0,$$

тада кажемо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ред са позитивним члановима**.

Јасно је да низ парцијалних сума реда са позитивним члановима представља монотоно растући низ. Имајући у виду да је монотоно растући низ конвергентан ако и само ако је ограничен одозго, долазимо до **потребног и довољног услова за конвергенцију овог реда.**

Теорема 6.4. *Ред са позитивним члановима је конвергентан ако и само ако је низ његових парцијалних сума ограничен одозго.*

Примјер 6.7. Показати да је **хармонијски ред**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

дивергентан.

Рјешење: Примијетимо да вриједи

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Можемо уочити да је

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16}, \ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Одавде је

$$s_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + n \cdot \frac{1}{2}$$

па је низ парцијалних сума неограничен. Сада на основу Теореме 6.4 закључујемо да је хармонијски ред дивергентан. ◊

У претходним примјерима конвергенцију редова смо испитивали коришћењем различитих приступа: одређивањем низа парцијалних сума и његове граничне вриједности, испитивањем граничне вриједности општег члана реда, те провјеравањем особина низа парцијалних сума које обезбјеђују конвергенцију или дивергенцију реда.

Поред наведених приступа, за испитивање конвергенције редова посебно су значајна тврђења у којима се на основу особина општег члана реда описују потребни или довољни услови за конвергенцију реда. Оваква тврђења се називају **критеријуми конвергенције** и у наставку наводимо неке од најзначајнијих и најчешће коришћених критеријума.

На почетку наводимо поредбени критеријум у којем, поред реда чију конвергенцију испитујемо, посматрамо и ред са позитивним члановима који поредимо са датим редом.

Теорема 6.5. (Поредбени критеријум) *Нека су дати редови са позитивним члановима* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Ако за све природне бројеве* n *вриједи неједнакост*

$$a_n \leq b_n,$$

тада из конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *слиједи конвергенција реда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *а из дивергенције реда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *слиједи дивергенција реда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Напоменимо да услов $a_n \leq b_n$ у поредбеном критеријуму не мора бити испуњен за све природне бројеве n. На основу Теореме 6.1 коначан број чланова реда не утиче на његову конверегенцију па је довољно да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да вриједи $a_n \leq b_n$ за $n \geq n_0$.

Услов који смо навели у поредбеном критеријуму може бити интерпретиран и помоћу одговарајуће граничне вриједности.

Теорема 6.6. *Нека су дати редови са позитивним члановима* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *и нека је*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$$

при чему је $0 \leq K \leq \infty$. *Тада вриједи:*

1) *ако је* $K < \infty$ *онда из конвергенције реда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *слиједи конвергенција реда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
2) *ако је* $K > 0$, *онда из дивергенције реда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *слиједи дивергенција реда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Примјер 6.8. Испитати конвергенцију редова

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$, б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Рјешење: а) Посматрајмо конвергентан ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ из Примјера 6.5. Имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(2n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

На основу Теореме 6.6 закључујемо да је дати ред конвергентан.

б) Нека је $\alpha \leq 0$. Тада је $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$, па је дати ред дивергентан. Нека је $0 < \alpha \leq 1$. Тада је

$$n^\alpha \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n},$$

па из Теореме 6.5 и дивергенције хармонијског реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, добијамо да је дати ред дивергентан.

Нека је $\alpha > 1$. Посматрајмо ред $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$. Овај ред је конвергентан јер је

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{3^{\alpha-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) = 1.$$

Нека је

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}, \qquad x \in [n-1, n].$$

Из Лагранжове теореме добијамо да постоји $\theta \in (0,1)$ такво да је

$$f(n) - f(n-1) = f'(n-1+\theta) \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} = -\frac{\alpha-1}{(n-1+\theta)^\alpha},$$

тј.

$$\frac{1}{(n-1+\theta)^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Пошто је

$$n-1+\theta < n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{(n-1+\theta)^\alpha} \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

на основу Теореме 6.5 добијамо да је дати ред конвергентан за $\alpha > 1$. ◊

Примједба 6.2. Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

се назива **хиперхармонијски ред**. На основу претходног примјера овај ред конвергира за $\alpha > 1$ и дивергира за $\alpha \leq 1$.

Наводимо и Даламберов[4] критеријум конвергенције.

Теорема 6.8. (Даламберов критеријум) *Нека је* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ред са позитивним члановима.*

1) Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{R}$ *такви да је*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1,\qquad n \geq n_0$$

тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергентан.*

Ако пак постоји ${n_0}' \in \mathbb{N}$ *тако да је*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,\qquad n \geq {n_0}'$$

тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *дивергира.*

2) Ако постоји

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира за* $L < 1$ *и дивергира за* $L > 1$.

[4] Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717 –1783), француски математичар и физичар

Примјер 6.10. Испитати конвергенцију редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$.

Рјешење: а) Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

на основу Даламберовог критеријума добијамо да је ред конвергентан.

б) Имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)(n+3)}{3^{n+1}}}{\frac{n(n+2)}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = \frac{1}{3} < 1$$

па је ред конвергентан на основу Даламберовог критеријума. ◊

Уколико је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

Даламберов критеријум не даје одговор на питање да ли је ред конвергентан. Заиста, хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ је дивергентан и вриједи $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. С друге стране, хиперхармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ је конвергентан, при чему такође вриједи $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

Теорема 6.9. (Кошијев коријени критеријум) *Нека је* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ред са позитивним члановима.*

1) Ако постоје $n_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in \mathbb{R}$ *такви да је*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \qquad n \geq n_0$$

тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергентан. Ако пак постоји* $n_0{}' \in \mathbb{N}$ *тако да је*

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \qquad n \geq n_0{}'$$

тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *дивергира.*

2) Ако постоји

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

онда ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира за* $L < 1$ *и дивергира за* $L > 1$.

Примјер 6.11. Испитати конвергенцију редова:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n$, б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

Рјешење: а) Имамо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2 > 1$$

па на основу другог дијела Кошијевог коријеног критеријума (Теорема 6.9) добијамо да је дати ред дивергентан.

б) Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

на основу другог дијела Кошијевог коријеног критеријума добијамо да дати ред конвергира. ◊

Слично као и код Даламберовог критеријума, можемо примијетити да уколико је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

Кошијев коријени критеријум не даје одговор на питање да ли је ред конвергентан. Заиста, хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ је дивергентан и вриједи $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, док је хиперхармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан и такође вриједи $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

Примједба 6.3. Ако посматрамо однос између Даламберовог и Кошијевог коријеног критеријума, онда се може показати да су они у случају када постоји $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ еквивалентни (или су оба неодлучива или оба дају исти резултат). Међутим, постоје примјери када се Даламберов критеријум не може примијенити а Кошијев критеријум даје одговор на питање конвергенције реда.

На крају, без доказа наводимо још један критеријум за конвергенцију редова који се може окарактерисати као поредбени критеријум. У овом критеријуму ред чију конвергенцију испитујемо поредимо са одговарајућим несвојственим интегралом.

Теорема 6.10. (Кошијев интегрални критеријум) *Нека је функција* $f(x)$ *дефинисана, позитивна, непрекидна и монотоно опадајућа на скупу* $[1,+\infty)$. *Тада су ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

и несвојствени интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

истовремено конвергентни или истовремено дивергентни.

За овај критеријум обично користимо термин **интегрални критеријум.**

Примјер 6.13. Испитати конвергенцију редова

а) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

*Рјешење:*а) Посматрајмо функцију $f(x)=e^{-x^2}$. Није тешко уочити да је ова функција дефинисана, позитивна и непрекидна на скупу $[1,+\infty)$. Пошто је

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

можемо закључити да је $f'(x)<0, x\in[1,+\infty)$, па је функција $f(x)$ монотоно опадајућа на скупу $[1,+\infty)$. Имајући у виду да је несвојствени интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ конвергентан (видјети Примјер 2.22 а)) на основу интегралног критеријума закључујемо да је посматрани ред конвергентан.

б) Посматрамо функцију

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$$

која је дефинисана, позитивна и непрекидна на скупу $[1, +\infty)$. Како је

$$f'(x) = -\frac{\ln(x+1)+1}{\big((x+1)\ln(x+1)\big)^2}$$

можемо закључити да је $f'(x) < 0, x \in [1, +\infty)$, па је функција $f(x)$ монотоно опадајућа на скупу $[1, +\infty)$. Испитајмо сада конвергенцију несвојственог интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$. Пошто је

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \begin{vmatrix} \ln(x+1) = t \\ dt = \dfrac{1}{x+1}dx \end{vmatrix} =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln(b+1)} \frac{dt}{t} = \lim_{b\to+\infty} (\ln(\ln(b+1) - \ln(\ln 2)) = +\infty,$$

закључујемо да је несвојствени интеграл дивергентан. Одавде, на основу интегралног критеријума закључујемо да је дати ред дивергентан.◊.

Поред напријед наведених критеријума, за испитивање конверегеније редова користе се и други критеријуми, од којих су најпознатији Рабеов[5], Кумеров[6] и Гаусов[7] критеријум.

---

[5] Joseph Ludwig Raabe (1801–1859), швајцарски математичар
[6] Ernst Eduard Kummer (1810 –1893), њемачки математичар
[7] Jochann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), њемачки математичар

6.1.1. Редови са произвољним члановима

Поред реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можемо посматрати и ред апсолутних вриједности његових чланова

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ \dots . + |a_n| + \cdots$$

Када је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан, тада кажемо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **апсолутно конвергентан.**

Лако се показује да је сваки апсолутно конвергентан ред уједно и конвергентан ред.

Теорема 6.11. *Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира, онда конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Доказ: Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан, из Кошијевог критеријума конвергенције (Теорема 6.2) добијамо да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да вриједи

$$(\forall n, p \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \Rightarrow s'_{n+\mathrm{p}} - s'_n = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + \left| a_{n+p} \right| < \varepsilon,$$

гдје су s'_n и $s'_{n+\mathrm{p}}$ парцијалне суме реда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. За парцијалне суме $s_{n+\mathrm{p}}$ и s_n реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ вриједи

$$(\forall n > n_0) \Rightarrow \left| s_{n+\mathrm{p}} - s_n \right| = \left| a_{n+1} + \ \dots . + a_{n+p} \right| \leq |a_{n+1}| + \cdots + \left| a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

На основу Кошијевог критеријума закључујемо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан. □

Обрнуто тврђење не вриједи, тј. конвергентан ред не мора бити и апсолутно конвергентан, што нам илуструје сљедећи примјер.

Примјер 6.14. Испитати конвергенцију и апсолутну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

Рјешење: Пошто је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

из дивергенције хармонијског реда закључујемо да дати ред није апсолутно конвергентан.

Испитајмо сада конвергенцију овог реда. За парцијалне суме s_{2n} датог реда имамо

$$s_{2n}=\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right).$$

Пошто је

$$s_{2(n+1)}=\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)+s_{2n}\leq s_{2n},$$

закључујемо да је низ (s_{2n}) монотоно опадајући. Примјећујемо да је низ ограничен одоздо јер вриједи

$$s_{2n}=-1+\frac{1}{2n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)\geq -1.$$

Дакле, низ (s_{2n}) је конвергентан тј. Постоји $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}=s$. Пошто је

$$s_{2n-1}=s_{2n}-\frac{1}{2n}$$

добијамо да је и низ (s_{2n-1}) конвергентан и да вриједи $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1}=s$. Одавде добијамо да је и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=s,$ [8] па је ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ конвергентан. ◊

Када је ред $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ конвергентан а није апсолутно конвергентан, тада кажемо да је тај ред **условно конвергентан.** Тако је ред из претходног примјера условно конвергентан.

[8] Ако m поднизова низа (x_n) чија унија даје низ (x_n) имају исту граничну вриједност x, онда је низ (x_n) конвергентан и има граничну вриједност x.

Видјели смо да је операција сабирања комутативна и асоцијативнна у случају збира коначно много сабирака. Међутим, када је у питању одређивање збира бесконачно много сабирака, закони асоцијативности и комутативности у општем случају не вриједе.

Примјер 6.15. У претходном примјеру смо показали да је ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

конвергентан. Нека је s сума овог реда. Ако чланове реда групишемо на сљедећи начин

$$1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right),$$

добијамо да је сума реда мања од нпр. прва два члана јер су сви чланови реда, осим првог, негативни

$$s < 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Ако пак чланове реда групишемо на сљедећи начин

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

онда добијамо да је сума већа од првог члана јер су сви чланови реда позитивни, па је

$$s > 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Дакле, пермутацијом и груписањем сабирака који се појављују унутар реда може доћи до промјене суме реда.[9] Може се показати да се сума конвергентног реда не мијења уколико се чланови реда групишу без промјене поретка. ◊

[9] Могуће је чак пермутовати чланове конвергентног реда тако да се добије дивергентан ред.

Из претходног примјера видимо да пермутација и груписање сабирака конвергентног реда може да утиче на суму, па чак и на конвергенцију реда. Ипак, **уколико је ред апсолутно конвергентан тада пермутација и груписање сабирака не утиче на суму реда.**

У наставку ћемо се упознати са најважнијим критеријумима који описују довољне услове за конвергенцију редова облика $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, b_n$.

Теорема 6.13 (Дирихлеов критеријум) *Ако је* (a_n) *монотон низ реалних бројева такав да вриједи* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *и ако је низ парцијалних сума реда* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ограничен, тада је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, b_n$ *конвергентан.*

Примјер 6.16. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n}$.

Рјешење: Низ $a_n = \frac{1}{n}$ је монотоно опадајући и вриједи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Посматрајмо низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ за $b_n = sinn$. Имамо

$$s_n = sin1 + sin2 + \cdots + sinn = \frac{1}{sin\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} sinksin\frac{1}{2} = \frac{1}{2sin\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left(cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \right) =$$

$$\frac{1}{2sin\frac{1}{2}} \left(cos\frac{1}{2} - cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \right) \Rightarrow |s_n| \le \frac{1}{sin\frac{1}{2}}.$$

Закључујемо да је низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} sinn$ ограничен, па на основу Дирихлеовог критеријума добијамо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinn}{n}$ конвергентан. ◊

Међу редовима са произвољним члановима посебно су интересантни алтернативни редови који имају особину да су узастопни елементи општег члана различитог знака.

Дефиниција 6.2. *Ако за ред реалних бројева* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *вриједи*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n a_{n+1} < 0$$

кажемо да је ред ***алтернативан.***

Најважнији примјер алтернативних редова су редови облика

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + \ldots . + (-1)^{n-1} c_n + \cdots$$

гдје је низ (c_n) константног знака (сви његови елементи су или позитивни или негативни).

За испитивање конвергенције ових редова најчешће се користи Лајбницов критеријум.

Теорема 6.14. (Лајбницов критеријум) *Ако је* $c_{n+1} \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, *тада је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ *конвергентан.*

Доказ: Конвергенција реда слиједи из Дирихлеовог критеријума, узимајући да је $a_n = c_n$ и $b_n = (-1)^{n-1}$. □

Примјер 6.17. Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Рјешење: Имамо

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\cdot\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.$$

Ред

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

је конвергентан по Лајбницовом критеријуму, док је ред

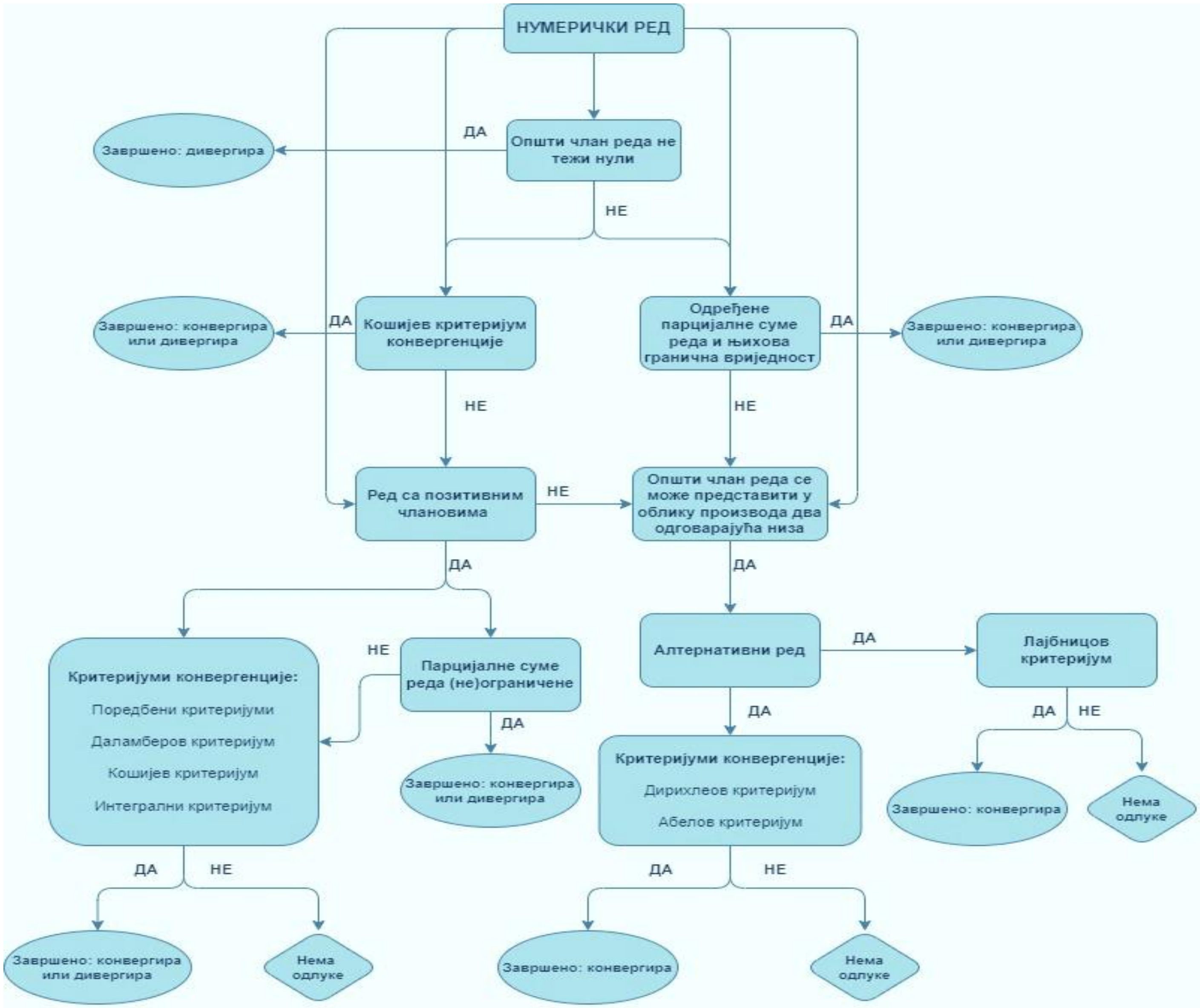
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$$

дивергентан (хармонијски ред). Дакле дати ред је сума конвергентног и дивергентног реда, па је дивергентан (видјети задатак 6. у Поглављу 6.1.1). ◊

Наводимо још један критеријум за испитивање конвергенције редова облика $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$.

Теорема 6.15 (Абелов критеријум). *Ако је низ реалних бројева* (a_n) *монотон и ограничен и ако је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *конвергентан, тада је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ *конвергентан.*

На крају, узимајући у обзир све напријед наведене приступе у испитивању конвергенције нумеричких редова, наводимо и један од могућих алгоритама за коректну и ефикасну примјену разматраних потребних и/или довољних услова за конвергенцију ових редова, Слика 6.2.


НУМЕРИЧКИ РЕД
Општи члан реда не тежи нули
ДА
Завршено: дивергира
НЕ
Кошијев критеријум конвергенције
ДА
Завршено: конвергира или дивергира
Одређене парцијалне суме реда и њихова гранична вриједност
ДА
Завршено: конвергира или дивергира
НЕ
НЕ
Ред са позитивним члановима
НЕ
Општи члан реда се може представити у облику производа два одговарајућа низа
ДА
ДА
Критеријуми конвергенције:
Поредбени критеријуми
Даламберов критеријум
Кошијев критеријум
Интегрални критеријум
НЕ
Парцијалне суме реда (не)ограничене
ДА
Завршено: конвергира или дивергира
Алтернативни ред
ДА
Лајбницов критеријум
ДА
Критеријуми конвергенције:
Дирихлеов критеријум
Абелов критеријум
ДА
НЕ
Завршено: конвергира
Нема одлуке
ДА
НЕ
Завршено: конвергира или дивергира
Нема одлуке
ДА
НЕ
Завршено: конвергира
Нема одлуке

Слика 6.2.

6.2. ФУНКЦИОНАЛНИ РЕДОВИ

6.2.1. Равномјерна конвергенција низова функција

Низ реалних бројева је пресликавање које природним бројевима придружује реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Пресликавање које природним бројевима придружује реалне функције $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), \dots$ дефинисане за $x \in B \subset \mathbb{R}$, називамо **функционални низ или низ функција**.

Аналогно као што смо низ реалних бројева означавали са (a_n), функционални низ означавамо са $\left(a_n(x)\right)$. Низ реалних бројева је заправо специјалан случај функционалног низа и то када су функције које представљају елементе низа константне.

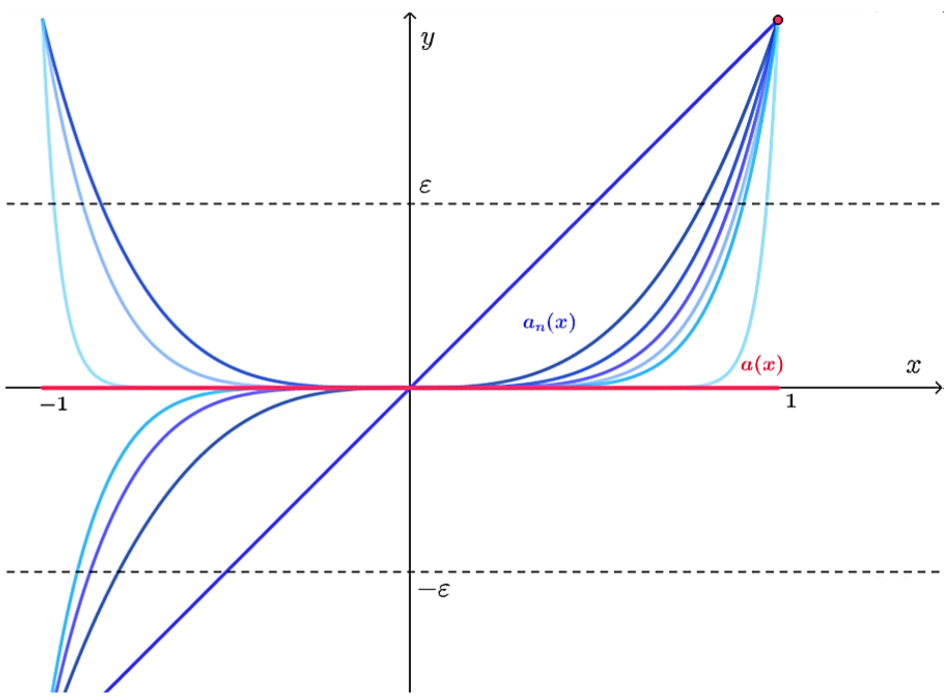
Дефиниција 6.3. *Нека је $\left(a_n(x)\right)$ низ функција које су дефинисане на скупу $B \subset \mathbb{R}$ и нека је $x_0 \in B$ произвољна фиксирана тачка. Уколико низ реалних бројева $\left(a_n(x_0)\right)$ конвергира, тада кажемо да је функционални низ $\left(a_n(x)\right)$* ***конвергентан у тачки $\boldsymbol{x_0}$***. *Ако је функционални низ $\left(a_n(x)\right)$ конвергентан у свакој тачки скупа $A \subset B$, тада кажемо да функционални низ $\left(a_n(x)\right)$* ***конвергира „тачка по тачка“ на скупу $\boldsymbol{A}$***.

Скуп свих тачака $x \in \mathbb{R}$ таквих да је низ реалних бројева $\left(a_n(x)\right)$ конвергентан, назива се **област конвергенције** функционалног низа $\left(a_n(x)\right)$.

Дефиниција 6.4. *Нека је $(a_n(x))$ функционални низ. Функција*

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x),$$

дефинисана на области конвергенције функционалног низа $(a_n(x))$, се назива ***гранична вриједност*** *овог функционалног низа или само* ***граница*** *функционалног низа.*



Слика 6.3

За конкретно задане функционалне низове $(a_n(x))$, чак и у случају кад су $a_n(x)$ елементарне функције, прилично ријетко је могуће експлицитно одредити функцију $a(x)$. Такође, особине функција $a_n(x)$ се обично не преносе на функцију $a(x)$.

Примјер 6.18. Нека је

$$a_n(x) = x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Тада је област конвергенције овог функционалног низа скуп $(-1,1]$, а гранична вриједност је функција

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}.$$

Уочимо да су функције $a_n(x)$ непрекидне на $(-1,1]$, што није случај са функцијом $a(x)$, Слика 6.3. ◊

За разлику од конвергенције низа реалних бројева, код функционалних низова имамо више врста конвергенције. Конвергенција „тачка по тачка“ има локални карактер и представља врсту конвергенције која не обезбјеђује преношење најважнијих особина (непрекидност, диференцијабилност, интеграбилност) са чланова функционалног низа на његову границу.

Зато уводимо **равномјерну (униформну) конвергенцију** која има глобални карактер и која обезбјеђује преношење најважнијих особина са чланова низа на његову границу.

Дефиниција 6.5. *Кажемо да низ функција* $\left(a_n(x)\right)$ ***равномјерно (униформно) конвергира*** *ка функцији* $a(x)$ *на скупу* A *ако*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in A)|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon. \tag{6. 7}$$

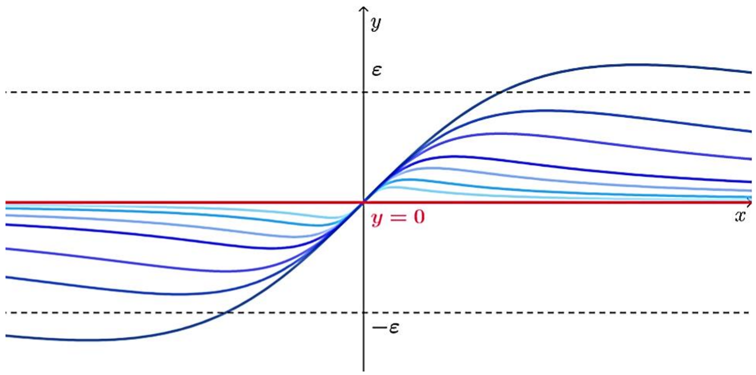
Уочимо да се у Дефиницији 6.1 захтијева да n_0 буде исти за свако $x \in A$, док код обичне конверегенције n_0 у општем случају зависи од x.

Када низ функција $\left(a_n(x)\right)$ равномјерно конвергира ка функцији $a(x)$ на скупу A, тада овај низ на скупу A конвергира и „тачка по тачка“ ка функцији $a(x)$. Такође, уколико низ функција $\left(a_n(x)\right)$ равномјерно конвергира ка функцији $a(x)$ на скупу A, тада он равномјерно конвергира ка функцији $a(x)$ и на сваком подскупу B скупа A.

Примјер 6.19. Доказати да је низ функција

$$a_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$$

равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$.



Слика 6.4

Рјешење: За фиксирано $x \in \mathbb{R}$ имамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$$

па је област конвергенције посматраног низа функција скуп $\mathbb{R}$ и граница је функција

$$a(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Даље имамо

$$|a_n(x) - a(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}.$$ [10]

Пошто је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$, за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 такав да је $(\forall n > n_0) \quad \frac{1}{2n} < \varepsilon$. Одавде добијамо да вриједи

$$(\forall n > n_0)(\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$$

па је низ функција равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$, Слика 6.4. ◊

Уочимо да низ функција $\big(a_n(x)\big)$ из Примјера 6.18 не конвергира равномјерно ка функцији $a(x)$. Заиста, нека је $0 < \varepsilon < 1$ произвољно и $x \in (0,1)$. Тада је

$$|a_n(x) - a(x)| = x^n < \varepsilon \iff n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}.$$

Пошто је $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{\ln\varepsilon}{\ln x} = +\infty$ није могуће одредити n_0 тако да је

$$(\forall n \geq n_0)\big(\forall x \in (0,1)\big)|a_n(x) - a(x)| < \varepsilon. \quad ◊$$

[10] $\frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 2n|x| \leq 1 + n^2x^2 \Leftrightarrow (1 - n|x|)^2 \geq 0$

На основу претходних разматрања закључујемо да уколико низ функција конвергира „тачка по тачка“ на неком скупу, тада не мора конвергирати равномјерно на том скупу. Због тога кажемо да је равномјерна конвергенција у одређеном смислу „јача“ од конвергенције „тачка по тачка“.

Разлика између равномјерне конвергенције и конвергенције „тачка по тачка“ се види и на сликама 6.3 и 6.4. У случају равномјерне конвергенције (Примјер 6.19), функције $a_n(x)$ имају екстремне вриједности у тачкама $(\pm 1/n, \pm 1/2n)$, па за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји n_0 такво да је

$$(\forall n \geq n_0)|a_n(x) - a(x)| = |a_n(x)| < \varepsilon.$$

То значи да се за $n \geq n_0$ комплетни графици функција $a_n(x) - a(x)$ налазе у скупу $|y| < \varepsilon$, Слика 6.4.

То међутим не вриједи у случају низа функција из Примјера 6.18 који није равномјерно конвергентан. Заиста, за $0 < \varepsilon < 1$ и $-1 < x < 1$ имамо

$$|a_n(x) - a(x)| = |a_n(x)| = |x|^n < \varepsilon$$

па ће за довољно велико n графици функција $a_n(x) - a(x) = x^n$ бити у скупу $|y| < \varepsilon$. Међутим, ма како било велико n, за тачке које су довољно близу јединици постоји дио графика функција $a_n(x) - a(x)$ који неће бити „испод“ праве $y = \varepsilon$. Дакле, за $0 < \varepsilon < 1$ не постоји n_0 тако да се за $n \geq n_0$ комплетни графици функција $a_n(x) - a(x)$ налазе у скупу $|y| < \varepsilon$, Слика 6.3.

За испитивање равномјерне конвергенције можемо користити сљедећу теорему.

Теорема 6.16. *Ако низ функција $\big(a_n(x)\big)$ које су дефинисане на скупу $B \subset \mathbb{R}$ конвергира „тачка по тачка“ ка функцији $a(x)$ на скупу $A \subset B$, тада је овај низ функција равномјерно конвергентан на скупу A ако и само ако вриједи*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in A}|a_n(x) - a(x)|\right) = 0.$$

Већ смо нагласили да конвергенција низа функција $(a_n(x))$ „тачка по тачка" ка функцији $a(x)$ на скупу A има локални карактер и да се особине функција $a_n(x)$ обично не преносе на функцију $a(x)$. Међутим, ако низ функција конвергира равномјерно на скупу A, тада се особине функција $a_n(x)$ преносе на граничну функцију $a(x)$. О овим особинама равномјерно конвергентних низова функција говоре сљедеће теореме.

Теорема 6.17. *Нека низ функција $(a_n(x))$ конвергира равномјерно ка функцији $a(x)$ на скупу A и нека је c тачка нагомилавања скупа A. Ако је $\lim_{x\to c} a_n(x) = A_n \quad (n = 1,2,\dots)$, тада је низ (A_n) конвергентан и вриједи*

$$\lim_{x\to c} a(x) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Другим ријечима, вриједи

$$\lim_{x\to c}\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to c} a_n(x),$$

тј. лимеси могу замијенити мјеста.

Коришћењем претходне теореме лако се доказује да је у случају равномјерне конвергенције низа непрекидних функција на скупу A, гранична функција такође непрекидна на скупу A.

Теорема 6.18. *Ако низ непрекидних функција $(a_n(x))$ конвергира равномјерно ка функцији $a(x)$ на скупу A, тада је функција $a(x)$ непрекидна на скупу A.*

Сљедећа теорема говори о односу одређеног интеграла и равномјерне конвергенције

Теорема 6.19. *Нека је* $\left(a_n(x)\right)$ *низ интеграбилних функција који конвергира равномјерно ка функцији* $a(x)$ *на сегменту* $[a,b]$. *Тада је функција* $a(x)$ *интеграбилна на* $[a,b]$ *и вриједи*

$$\int_a^b a(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

Дакле, у случају равномјерне конвергенције лимес и интеграл могу замијенити мјеста, тј.

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} a_n(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)dx.$$

На крају се показује да у случају равномјерне конвергенције низа диференцијабилних функција на $[a,b]$, уз одређене претпоставке лимес и извод могу замијенити мјеста.

Теорема 6.20. *Нека је* $\left(a_n(x)\right)$ *низ диференцијабилних функција на* $[a,b]$ *такав да је за неку тачку* $c\in[a,b]$ *низ* $\left(a_n(c)\right)$ *конвергентан. Ако низ функција* $\left({a_n}'(x)\right)$ *конвергира равномјерно на* $[a,b]$, *онда и низ функција* $\left(a_n(x)\right)$ *конвергира равномјерно на* $[a,b]$ *ка функцији* $a(x)$ *и вриједи*

$$a'(x) = \lim_{n\to\infty}{a_n}'(x).$$

Одавде добијамо да у случају равномјерне конвергенције низа диференцијабилних функција на $[a,b]$, извод и лимес могу замијенити мјеста, тј. вриједи

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty}{a_n}'(x).$$

6.2.2. Равномјерна конвергенција функционалних редова

Нека је $a_1(x),\ a_2(x), \dots, a_n(x), \dots$ функционални низ чији су елементи функције дефинисане на скупу $B \subset \mathbb{R}$. Израз

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x) + \cdots$$

се назива **функционални ред или ред функција**.

Функционални низ $(a_n(x))$ називамо **општи члан** функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

Општи члан функционалног реда генерише функционални низ $(S_n(x))$

$$S_1(x) = a_1(x),$$
$$S_2(x) = a_1(x) + a_2(x), \dots,$$
$$S_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \cdots + a_n(x), \dots$$

који називамо **низ парцијалних сума** функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$. За низ парцијалних сума користимо и једноставнији запис

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$$

Као и код низова функција, код функционалних редова постоји више различитих конвергенција. Најважније су конвергенција „тачка по тачка“ и равномјерна конвергенција.

Кажемо да функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **конвергира „тачка по тачка“** на скупу A, ако низ његових парцијалних сума $\left(S_n(x)\right)$ конвергира „тачка по тачка“ на скупу A .

Скуп свих тачака $x \in \mathbb{R}$ таквих да је функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ конвергентан, назива се **област конвергенције** функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

На области конвергенције функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ дефинисана је функција

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

коју називамо **гранична функција (**или само **граница)** функционалног реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ или **сума** овог функционалног реда.

Функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ **равномјерно (униформно) конвергира** на скупу A ако низ његових парцијалних сума $\left(S_n(x)\right)$ равномјерно конвергира на A ка некој функцији $S(x)$, тј.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in A)|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Уколико функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномјерно конвергира ка функцији $S(x)$ на A, јасно је да он тада равномјерно конвергира ка $S(x)$ и на сваком подскупу B скупа A.

Равномјерна конвергенција редова је, као и код низова, „јача“ од конвергенције „тачка по тачка“, тј. ако функционални ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномјерно конвергира ка функцији $S(x)$ на A, тада овај ред конвергира и „тачка по тачка“ ка $S(x)$ на A. То олакшава испитивање равномјерне конвергенције пошто је по правилу једноставније одредити суму у конвергенцији „тачка по тачка“. Због тога се најчешће прво одреди сума реда у конвергенцији „тачка по тачка“, а затим се показује да добијена сума јесте или није гранична функција у равномјерној конвергенцији.

Примјер 6.20. а) Ред
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$$
је на основу Лајбницовог критеријума конвергентан за свако фиксирано $x\in\mathbb{R}$, па је област конвергенције посматраног реда скуп $\mathbb{R}$. Нека је $S(x),\ \ x\in\mathbb{R}$ граница овог функционалног реда. За испитивање равномјерне конвергенције реда не можемо примијенити Теорему 6.16 јер је захтјевно одредити функцију $S(x)$. Ипак, пошто је
$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n+2}+\frac{(-1)^{n+2}}{x^2+n+3}+\cdots\right|$$
имамо да је
$$(\forall x\in\mathbb{R})\ |S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{x^2+n+1}\Rightarrow|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n+1}.$$
Пошто је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ закључујемо да је ред равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$.

б) Ред
$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
конвергира „тачка по тачка“ када је $x\in(-1,1)$, док је за $x\notin(-1,1)$ посматрани ред дивергентан. Закључујемо да је област конвергенције овог реда скуп $(-1,1)$. Гранична функција је дефинисана на области конвергенције и одређујемо је као суму геометријског реда из (6.3):
$$S(x)=\frac{1}{1-x}.$$

За испитивање равномјерне конверегенције посматрамо разлику

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{1 - x^n}{1 - x} - \frac{1}{1 - x}\right| = \frac{|x|^n}{1 - x}.$$

Пошто је за произвољно $n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{x \to 1-} \frac{|x|^n}{1-x} = +\infty$, закључујемо да је за свако $n \in \mathbb{N}$

$$sup_{x \in (-1,1)} |S_n(x) - S(x)| = +\infty$$

па ред није равномјерно конвергентан на основу Теореме 6.16. ◊

Потребни и довољни услови за равномјерну конвергенцију реда функција $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ могу се формулисати помоћу Кошијевог критеријума конвергенције.

Теорема 6.21. *Ред функција* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергира на* $A \subset \mathbb{R}$ *ако и само ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да за све* $n \in \mathbb{N}$ *за које је* $n > n_0$ *и за све* $p \in \mathbb{N}$ *вриједи*

$$(\forall x \in A) \left|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ \ldots . + a_{n+p}(x)\right| < \varepsilon.$$

За испитивање равномјерне конверегенције редова користе се и други критеријуми, а најједноставнији и најчешће примјењивани критеријум је **Вајерштрасов критеријум**.

Лема 6.2. (Вајерштрасов критеријум равномјерне конвергенције) *Нека постоји низ* (c_n) *реалних бројева такав да вриједи:*

1) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in A)\ |a_n(x)| \leq c_n$

2) *ред* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *конвергира.*

Тада ред функција $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергира на* A.

Доказ: За произвољно $x \in A$ и произвољне $n, p \in \mathbb{N}$ вриједи

$$\left|a_{n+1}(x) + \cdots. + a_{n+p}(x)\right| \leq |a_{n+1}(x)| + \cdots + \left|a_{n+p}(x)\right| \leq c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots + c_{n+p}.$$

Пошто је ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергентан, на основу Кошијевог критеријума конвергенције (Теорема 6.2) имамо да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да вриједи

$$(\forall n, p \in \mathbb{N})(\forall n > n_0) \Rightarrow \left|s_{n+\mathrm{p}} - s_n\right| = \left|c_{n+1} + c_{n+2} + \ \ldots. + c_{n+p}\right| < \varepsilon.$$

За овако изабрано n_0, на основу почетне неједнакости добијамо да вриједи

$$(\forall n, p \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall x \in A)\left|a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + \ \ldots. + a_{n+p}(x)\right| < \varepsilon,$$

па на основу Теореме 6.21 добијамо да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномјерно конвергентан. □

Примјер 6.21. Испитати равномјерну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ на $\mathbb{R}$.

Рјешење: Очигледно је $0 < \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Пошто је нумерички ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан, на основу Вајерштрасовог критеријума закључујемо да је дати функционални ред равномјерно конвергентан на $\mathbb{R}$. ◊

Наводимо јошдва критеријума за равномјерну конвергенцију редова: Абелов и Дирихлеов.

Лема 6.3. (Абелов критеријум равномјерне конвергенције) *Нека су испуњени услови:*

1) низ $\left(a_n(x)\right)$ је монотон за свако $x \in A \subset \mathbb{R}$ и ***равномјерно ограничен*** *на A, тј. постоји $M \in \mathbb{R}$ тако да $(\forall x \in A)$ $(\forall n \in \mathbb{N})|a_n(x)| \leq M$ и*

2) ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ равномјерно конвергира на A.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ равномјерно конвергира на A.

Лема 6.4. (Дирихлеов критеријум равномјерне конвергенције) *Нека су испуњени услови:*

1) низ $(a_n(x))$ *је монотон за свако* $x \in A \subset \mathbb{R}$ *и равномјерно конвергира ка функцији* $a(x) = 0$ *на* A,

2) низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *је* ***равномјерно ограничен*** *на* A, *тј. постоји* $M \in \mathbb{R}$ *тако да* $(\forall x \in A)(\forall n \in \mathbb{N})\ |b_1(x) + \cdots + b_n(x)| \leq M$.

Тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *равномјерно конвергира на* A.

Примјер 6.22. Испитати равномјерну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}$ на $[0,\infty)$.

Рјешење: Нека је

$$a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+x}} \quad \text{и} \quad b_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Очигледно је низ $(a_n(x))$ за фиксирано $x \in [0,\infty)$ монотоно опадајући. Из неједнакости

$$\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq 1, \qquad x \in [0,\infty)$$

добијамо да је низ $(a_n(x))$ равномјерно ограничен на $[0,\infty)$. Пошто је нумерички ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

конвергентан по Лајбницовом критеријуму, он је и равномјерно конвергентан на произвољном скупу. Према томе, дати функционални ред је по Абеловом критеријуму равномјерно конвергентан на $[0,\infty)$. ◊

Примјер 6.23. Испитати равномјерну конвергенцију реда
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{xsinnx}{1+n^2x^2}$$
на интервалу $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Рјешење: Нека је
$$a_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2} \quad \text{и} \quad b_n(x)=sinnx.$$
У Примјеру 6.19 смо видјели да низ функција $a_n(x)$ равномјерно конвергира ка функцији $a(x)=0$ на $\mathbb{R}$, па дакле и на његовом подскупу $\left(\frac{1}{2},1\right)$. Није тешко уочити да је за произвољно фиксирано $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ низ $a_n(x)$ монотоно опадајући. С друге стране, за $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ вриједи
$$|S_n(x)|=|b_1(x)+\cdots+b_n(x)|=|sinx+\cdots+sinnx|=\left|\frac{1}{2sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2sin\frac{x}{2}sinkx\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{2sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(cosx\left(k-\frac{1}{2}\right)-cosx\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right|=\frac{1}{\left|2sin\frac{x}{2}\right|}\left|cos\frac{x}{2}-cosx\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|\le\frac{1}{sin\frac{x}{2}}\le\frac{1}{sin\frac{1}{4}}$$
па је низ парцијалних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ равномјерно ограничен на $\left(\frac{1}{2},1\right)$. На основу Дирихлеовог критеријума добијамо да је дати ред равномјерно конвергентан на $\left(\frac{1}{2},1\right)$. ◊

Равномјерно конвергентни редови имају особине сличне особинама равномјерно конвергентних низова функција. На почетку се показује да се гранична вриједност равномјерно конвергентног реда може одредити „уласком под знак суме“.

Теорема 6.22. *Нека је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан на* A *и нека у некој тачки нагомилавања* $a \in A$ *постоји* $\lim\limits_{x \to a} a_n(x)$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$. *Тада је ред*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} a_n(x)$$

конвергентан и вриједи

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} a_n(x).$$

Примјер 6.24. Наћи

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

Рјешење: Пошто је за $x \in [0, \infty)$

$$\frac{1}{2^n n^x} \leq \frac{1}{2^n}$$

и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ је конвергентан (геометријски ред за $q = \frac{1}{2}$), на основу Вајерштрасовог критеријума закључујемо да дати ред равномјерно конвергира на $[0, \infty)$. Примјеном Теореме 6.22 и формуле за суму геометријског реда (6.2) добијамо

$$\lim_{x \to 0+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2^n n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \quad \lozenge$$

Из претходне теореме се добија да је сума равномјерно конвергентног реда непрекидних функција такође непрекидна функција (исти закључак слиједи и из Теореме 6.18).

Теорема 6.23. *Ако су функције* $a_n\colon A \to \mathbb{R}$ *непрекидне у тачки* $\alpha \in A$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *и ако је функционални ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан у некој околини тачке* α, *тада је и гранична функција*

$$a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

непрекидна у тачки α.

Из Теореме 6.20 лако се добија сљедећи резултат који се односи на особину диференцирања равномјерно конвергентних редова „члан по члан".

Теорема 6.24. *Нека су за* $n \in \mathbb{N}$ *функције* $a_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрекидно диференцијабилне на* $[a,b]$ *и нека је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *конвергентан у бар једној тачки из* $[a,b]$, *а ред извода*

$$\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}'(x)$$

равномјерно конвергентан на $[a,b]$. *Тада је ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан на* $[a,b]$, *његова сума је диференцијабилна функција и вриједи*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}'(x).$$

Равномјерно конвергентан ред да се може интегралити „члан по члан“ (слиједи из Теореме 6.19).

Теорема 6.25. *Нека је ред функција* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномјерно конвергентан на* $[a,b]$ *и нека су функције* $a_n(x)$ *интеграбилне на* $[a,b]$. *Тада је и сума реда интеграбилна функција и вриједи*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx.$$

Примјер 6.26. Израчунати $\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\right) dx$.

Рјешење: Пошто је $\frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $x \in [0,\infty)$, ред је на основу Вајерштрасовог критеријума равномјерно конвергентан и функција $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ је дефинисана и непрекидна на $[0,\infty)$. На основу Теореме 6.25 то значи да за свако $a, b \geq 0$ важи

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \frac{dx}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{b+n}\right).$$

Одавде добијамо

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ смо израчунали у Примјеру 6.2 и показали да је једнака 1. Дакле

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2}\right) dx = 1. \quad \lozenge$$

6.3. СТЕПЕНИ РЕДОВИ

Функционални ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad x_0, a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{6.8}$$

се назива **степени или потенцијални ред.**

За $x = x_0$ степени ред је очигледно конвергентан (општи члан реда је нула низ). Дакле, тачка x_0 припада области конвергенције степеног реда. Постоје степени редови чија област конвергенције не садржи ниједну другу тачку и они немају никакву практичну примјену. У наставку разматрамо степене редове чија област конвергенције, поред тачке x_0, садржи и друге тачке. Област конвергенције оваквих степених редова описана је у сљедећој леми.

Лема 6.5. *Ако степени ред (6.8) конвергира за неко $x = \bar{x} \neq x_0$, онда он апсолутно конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$ за које је $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$.*

Доказ: Из конвергенције реда реалних бројева $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{x}-x_0)^n$ слиједи да је реални низ $a_n(\bar{x}-x_0)^n$ ограничен, тј. да постоји $M \in \mathbb{R}$ такав да за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $|a_n(\bar{x}-x_0)^n| \leq M$. За произвољно x са особином да је $|x-x_0| < |\bar{x}-x_0|$ имамо $\left|\frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0}\right| = q < 1$. Добијамо

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n(\bar{x}-x_0)^n| \left|\frac{x-x_0}{\bar{x}-x_0}\right|^n \leq Mq^n.$$

Пошто геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ конвергира, из Поредбеног критеријума (Теорема 6.5) добијамо да конвергира и степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\bar{x}-x_0)^n$. □

Дакле, за одређивање области конвергенције степеног реда, потребно је одредити број

$$R = sup\left\{|x - x_0|: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ конвергира } \right\} \tag{6.9}$$

јер степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ конвергира за $|x - x_0| < R$ и дивергира за $|x - x_0| > R$.

Број R дефинисан релацијом (6.9) назива се **радијус** или **полупречник конвергенције** степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$. Ако је $R > 0$ тада се интервал

$$(x_0 - R, x_0 + R)$$

назива **интервал конверегенције** степеног реда.

Поред интервала конвергенције, област конвергенције степеног реда може да садржи и тачке на крајевима интервала конвергенције, тј. област конвергенције има један од сљедећих облика:

$$(x_0 - R, x_0 + R), \quad [x_0 - R, x_0 + R), \quad (x_0 - R, x_0 + R] \text{ или } [x_0 - R, x_0 + R].$$

Зато се за $R < \infty$ поставља питање конвергенције степеног реда на крајевима интервала конвергенције, тј. у тачкама $x = x_0 \pm R$. На ово питање се у општем случају не може дати никакав одређен одговор што илуструје сљедећи примјер.

Примјер 6.28. а) Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$$

дивергира за свако $x \neq 0$ јер му општи члан не тежи нули. За овај ред је $R = 0$. Област конвергенције овог реда је скуп $\{0\}$.

б) Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

конвергира за свако $x \in \mathbb{R}$ што се може провјерити нпр. помоћу Даламберовог критеријумима. За овај ред је $R = +\infty$. Област конвергенције овог реда је скуп $\mathbb{R}$.

в) Ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

конвергира за $|x| < 1$ а дивергира за $|x| \geq 1$. Дакле, $R = 1$, интервал конвергенције је $(-1,1)$ и ред дивергира на крајевима интервала конврвгенције. Област конвергенције је скуп $(-1,1)$ који је једнак интервалу конвергенције.

г) Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

конвергира за $|x| < 1$ а дивергира за $|x| > 1$. Дакле, $R = 1$ и интервал конвергенције је $(-1,1)$. Ред (условно) конвергира за $x = -1$ и дивергира за $x = 1$. Област конвергенције овог реда је скуп $[-1,1)$.

д) Ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

конвергира за $|x| < 1$ и дивергира за $|x| > 1$, $R = 1$ и интервал конвергенције је скуп $(-1,1)$. Ред (апсолутно) конвергира за $x = \pm 1$. Област конвергенције овог реда је сегмент [-1,1]. ◊

Радијус конвергенције степеног реда може се одредити помоћу сљедећих формула:[11]

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{6.10}$$

односно

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{6.11}$$

ако ови лимеси постоје.

Примјер 6.29. Одредити полупречник конверегенције, интервал конверегенције и област конвергенције степеног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} x^n.$$

Рјешење: Из (6.11) имамо

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n2^n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2.$$

Интервал конвергенције је $(-2,2)$. Испитујемо конвергенцију на крајевима интервала конвергенције. За $x = 2$ добијамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ који је условно конвергентан, док за $x = -2$ добијамо хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ који је дивергентан. Област конвергенције степеног реда је $[-2,2)$. ◊

---

[11] Овај резултат слиједи из Коши-Адамарове формуле (видјети Теорему 6.26 у Војводић и Владичић, Математика 2)

Видјели смо да је питање равномјерне конвергенције функционалних редова изузетно значајно, јер се велики број важних математичких особина функција које представљају општи члан реда преноси на суму реда. Зато разматрамо питање равномјерне конвергенције степених редова.

Лема 6.6. *Нека степени ред* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *има полупречник конвергенције* $R>0$. *Тада је за свако* r, $0<r<R$, *овај степени ред равномјерно конвергентан на* $[x_0-r, x_0+r]$.

Доказ: Пошто је степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ апсолутно конвергентан за $x=x_0+r$, из Вајерштрасовог критеријума слиједи да је овај степени ред равномјерно конвергентан на сегменту $[x_0-r, x_0+r]$. □

Пошто је свака тачка интервала (x_0-R, x_0+R) садржана у неком сегменту облика $[x_0-r, x_0+r]$ за неко $0<r<R$, коришћењем претходне леме и особина равномјерно конвергентних функционалних редова лако се доказују неке од најважнијих особина степених редова.

На почетку, будући да су функције $a_n(x-x_0)^n$ непрекидне, коришћењем Теореме 6.23 и Леме 6.6 се показује да је сума степеног реда непрекидна функција на интервалу конвергенције.

Посљедица 6.1. *Ако је радијус конвергенције R степеног реда* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *позитиван, тада је функција*

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

непрекидна на интервалу конвергенције (x_0-R, x_0+R).

Сљедећа посљедица се односи на јединственост степеног реда у околини тачке x_0.

Посљедица 6.2. *Ако у некој околини тачке* x_0 *вриједи*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \tag{6.12}$$

онда је $a_n = b_n$ за $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказ: Стављајући у једнакост (6.12) $x = x_0$ добијамо $a_0 = b_0$. Тада је

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^n.$$

Ако је $x \neq x_0$, дијељењем посљедње једнакости са $x - x_0$ добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Пошто је сума степеног реда непрекидна функција, горња једнакост вриједи и у тачки x_0, одакле добијамо $a_1 = b_1$. Настављајући даље овај поступак, добијамо $a_n = b_n$ за $n \in \mathbb{N}_0$. □

Важне посљедице Леме 6.6 односе се и на могућност интеграције и диференцирања степеног реда „члан по члан“ на интервалу конвергенције.

Наиме, из Теореме 6.25 добијамо да је сума степеног реда интеграбилна функција на интервалу конвергенције $(x_0 - R, x_0 + R)$ и да се степени ред може интегралити „члан по члан“ на сваком интервалу (a, b), $x_0 - R < a < b < x_0 + R$. Показује се да је полупречник конвергенције реда добијеног интеграцијом исти као и полупречник конвергенције почетног степеног реда.

Такође, из Теореме 6.24 добијамо да је сума степеног реда диференцијабилна функција на интервалу конвергенције и да се ред може диференцирати „члан по члан“, те да је полупречник конвергенције степеног реда извода исти као полупречник конвергенције датог степеног реда.

Уочимо да степени ред у општем случају не конвергира равномјерно на свом интервалу конвергенције. Може се показати да нпр. редови

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

не конвергирају равномјерно на интервалу конвергенције $(-1,1)$. Међутим, ако степени ред конвергира у неком од крајева интервала конвергенције, макар и условно, тада се интервал равномјерне конвергенције може „проширити“ до тога краја. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 6.27. (Абелова теорема) *Нека степени ред* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *има полупречник конвергенције* $R>0$ *и нека конвергира за* $x=x_0+R$. *Тада овај степени ред конвергира равномјерно и на сегменту* $[x_0, x_0+R]$ *и његова сума је функција непрекидна слијева у тачки* $x=x_0+R$, *тј. вриједи*

$$\lim_{x\to(x_0+R)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n .$$

Доказ: Имамо $a_n(x-x_0)^n = a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$. Како је ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ конвергентан, а низ $\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$ ограничен и опадајући на $[x_0, x_0+R]$, добијамо да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ равномјерно конвергира на $[x_0, x_0+R]$ на основу Абеловог критеријума (Лема 6.3). □

6.4. ТЕЈЛОРОВ РЕД

Нека је функција f дефинисана на неком интервалу који садржи тачку x_0 и нека постоје сви изводи функције f у тачки x_0. Степени ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{6.13}$$

се назива **Тејлоров ред** функције f. Ако је $x_0 = 0$ кажемо да је ред (6.13) **Маклоренов ред** функције f.

Тејлоров ред функције f у датој тачки x може да буде конвергентан или дивергентан, а ако је конвергентан онда може, али не мора да конвергира ка $f(x)$.

Довољан услов да Тејлоров ред конвергира ка функцији f на неком интервалу $[a,b]$ који садржи тачку x_0, је да на том интервалу постоје сви изводи функције f и да су униформно ограничени, тј. да постоји константа $M > 0$ тако да важи

$$(\forall x \in [a,b])(\forall n \in \mathbb{N})\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M.$$

У сљедећој теореми доказујемо да је сваки степени ред Тејлоров ред функције која је дефинисана сумом тог реда.

Теорема 6.28. (Теорема о јединствености степеног реда) *Сваки степени ред са полупречником конвергенције $R > 0$ је Тејлоров ред функције која је дефинисана сумом тог реда на $(x_0 - R, x_0 + R)$.*

Доказ: Посматрајмо степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ и нека је $a(x)$ сума овог степеног реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a(x). \tag{6.14}$$

Уколико у (6.14) ставимо да је $x = x_0$ добијамо да је $a_0 = a(x_0)$. Диференцирањем у једнакости (6.14) и затим уврштавањем $x = x_0$ у добијену једнакост, добијамо да је $a_1 = a'(x_0)$. Настављајући овај поступак, након диференцирања једнакости (6.14) k −пута и затим уврштавања $x = x_0$ у добијену једнакост, добијамо да је

$$a_k = \frac{a^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Одавде добијамо да је дати степени ред Тејлоров ред функције која је дефинисана сумом тог реда. □

Из претходне теореме добијамо да на $(x_0 - R, x_0 + R)$ вриједи

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Лако се провјерава да су Маклоренови редови неких елементарних функција сљедећег облика.

Таблица основних Маклоренових редова

Функција	Маклоренов ред	R
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$
$sinx$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$	$+\infty$
$cosx$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$	1
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	1
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	1

Примјер 6.30. Нађи суму реда из примјера 6.29.

Рјешење: Показали смо да је за ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}x^n$ интервал конвергенције $(-2,2)$, те да је ред (условно) конвергентан за $x=2$ и дивергентан за $x=-2$. Нека је

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}x^n\,,\quad x\in(-2,2).$$

Коришћењем таблице основних Маклоренових редова, добијамо

$$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\ -\ln\left(1+\frac{x}{2}\right),\ \ x\in(-2,2).$$

Пошто ред конвергира и за $x=2$, примјеном Абелове теореме (Теорема 6.27) добијамо да горња једнакост вриједи и за $x=2$. Дакле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n}x^n=\ -\ln\left(1+\frac{x}{2}\right),\quad x\in(-2,2].\quad \Diamond$$

Примјер 6.31. Развити у Маклоренов ред функцију $f(x)=sin^2x$.

Рјешење: Из идентитета $f(x)=sin^2x=\frac{1}{2}(1-cos2x)$ и Маклореновог реда функције $cosx$ добијамо

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{2}\left(1-1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}\right)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}=\ x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8+\cdots,\ \ x\in\mathbb{R}.\ \ \Diamond$$

Примјер 6.32. Испитати конвергенцију и наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

Рјешење: Лако се добија да је $R = 1$ и да је ред дивергентан за $x = \pm 1$ (општи члан реда не тежи нули). Нека је

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad x \in (-1,1).$$

Тада је

$$f(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xg(x).$$

Интеграцијом реда члан по члан добијамо

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

Одавде диференцирањем добијамо

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x g(t)dt\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

одакле је примјеном формуле (2.6)

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Према томе

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1,1). \ \lozenge$$