УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2022/2023

ТЕМА 5: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

5.1. Увод

5.2. Диференцијалне једначине првог реда

5.3. Линеарна једначина $n-$ тог реда

ЛИТЕРАТУРА: Биљана Војводић, Владимир Владичић: Математика II, Машински факултет, Бања Лука, 2022

НАСТАВНИК: проф. др Биљана Војводић

ТЕМА 5: ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

5.1. УВОД

Диференцијалне једначине имају велику примјену у многим областима науке, а посебно у физици, јер се математички модели помоћу којих се описују закони физике најчешће заснивају на диференцијалним једначинама.

Једначина која садржи бар један извод непознате функције се назива **диференцијална једначина.**

Дефиниција 5.1. *Једначина облика*

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{5.1}$$

гдје је $F: X \to R, \quad X \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *дата функција у којој се јавља бар један од извода непознате функције једне реалне промјенљиве* $y = y(x)$, *се назива* ***обична диференцијална једначина***.

За функцију *F* из Дефиниције 5.1 најчешће се претпоставља да је непрекидна на свом домену.

Уколико непозната функција није функција једне већ двије или више промјенљивих, тада говоримо о **парцијалним диференцијалним једначинама.** Парцијална диференцијална једначина садржи бар један парцијални извод непознате функције. У наставку разматрамо само обичне диференцијалне једначине и умјесто термина *обична диференцијална једначина* користимо термин *диференцијална једначина* или само *једначина*.

Дефиниција 5.2. ***Ред обичне диференцијалне једначине*** *је ред највишег извода који у њој фигурише.*

Ако се обична диференцијална једначина може ријешити по $y^{(n)}$, тада добијамо **нормални облик** диференцијалне једначине

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

гдје је $f: X \to R, X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ позната функција.

Примјер 5.1. Једначина

$$xy''' + 2y'' + 4xy = (3x + 2)e^{-x}$$

гдје је $y = y(x)$ непозната функција је обична диференцијална једначина. Њен нормални облик гласи

$$y''' = -\frac{2}{x}y'' - 4y + \left(3 + \frac{2}{x}\right)e^{-x}, \qquad x \neq 0.$$

Рјешење једначине је свака функција која ту једначину претвара у идентитет.

Дефиниција 5.3. *Кажемо да је функција* $y = g(x)$ ***рјешење диференцијалне једначине*** *(5.1) на интервалу* I *ако вриједи*

$$F\left(x, g, g', g'', \dots, g^{(n)}\right) = 0, \quad x \in I.$$

Уочимо да уколико је функција $g(x)$ рјешење једначине (5.1) на I, тада је она n −пута диференцијабилна на I. За обичне диференцијалне једначине код којих је функција F непрекидна на X, рјешење једначине је n −пута непрекидно диференцијабилна функција.

Примјер 5.2. Функција $y = g(x) = e^{-x}$ је рјешење једначине из Примјера 5.1 на $(-\infty, +\infty)$ јер је

$$g(x) = e^{-x}, \qquad g'(x) = -e^{-x}, \qquad g''(x) = e^{-x}, \qquad g'''(x) = -e^{-x}$$

и након уврштавања добијамо идентитет

$$-xe^{-x} + 2e^{-x} + 4xe^{-x} = (3x+2)e^{-x}. \ \lozenge$$

Рјешења диференцијалне једначине се могу представити у различитим облицима:

- ❖ рјешење облика $y = g(x),\ x \in I$ је рјешење у **експлицитном облику,**
- ❖ рјешење облика $G(x,y) = 0, (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ је рјешење у **имплицитном облику** и
- ❖ рјешење облика $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ a < t < b$ је рјешење у **параметарском облику.**

Тако је нпр. рјешење $y = e^{-x}$ једначине из Примјера 5.1 рјешење у експлицитном облику.

Примјер 5.3. а) Нека је $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Функција $y = y(x)$ задата у имплицитном облику са $G(x,y) = 0$ је рјешење диференцијалне једначине

$$yy' + x = 0$$

на интервалу $-1 < x < 1$. Заиста, из формуле за одређивање парцијалних извода сложене функције добијамо

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow 2x + 2yy' = 0 \Longrightarrow yy' + x = 0$$

па је функција $y = y(x)$ задата са $G(x,y) = 0, -1 < x < 1$, рјешење једначине.

б) Параметарски задата функција $x = e^t + 1,\ y = (t-1)e^t,\ t \in (-\infty, +\infty)$ је рјешење $y = y(x)$ у параметарском облику диференцијалне једначине

$$y = (y' - 1)e^{y'}$$

јер је

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{te^t}{e^t} = t \Rightarrow (t-1)e^t = (t-1)e^t.$$

Уочимо да се ово рјешење може записати и у експлицитном облику

$$y = (x-1)(\ln(x-1) - 1), \qquad x > -1. \ \lozenge$$

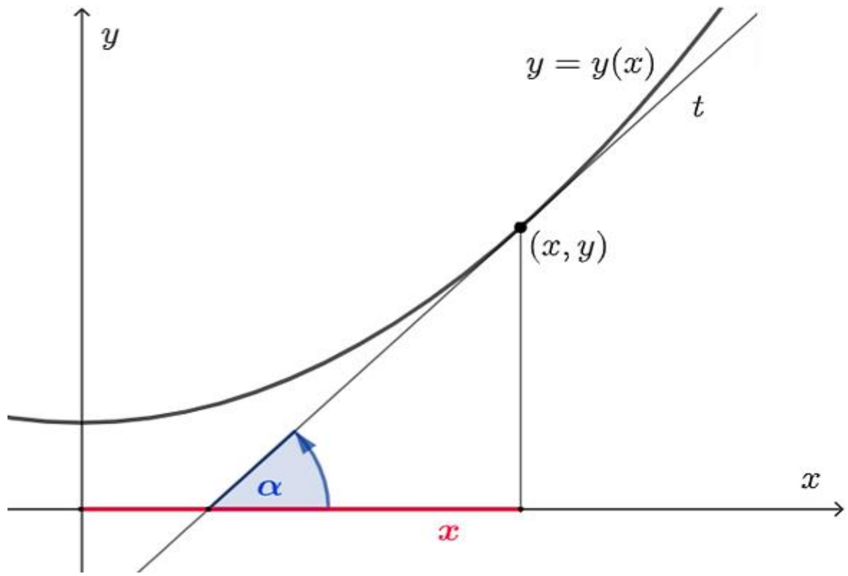
Теорија диференцијалних једначина се бави одређивањем свих рјешења једначине и испитивањем њихових особина. Поступак рјешавања диференцијалних једначина назива се **интеграција** јер се одређивање рјешења обично своди на одређивање интеграла.

График рјешења диференцијалне једначине се назива **интегрална крива.**

Примјер 5.4. Одредити криву која пролази кроз тачку $M(0,1)$ и која има особину да је у свакој њеној тачки коефицијент правца тангенте једнак двострукој вриједности апсцисе тачке додира.

Рјешење: Нека је $y = y(x)$ једначина криве која има особину да је у свакој њеној тачки коефицијент правца тангенте једнак двострукој вриједности апсцисе тачке додира, Слика 5.1. Пошто је коефицијент правца тангенте једнак $tg\alpha$, гдје је α угао који тангента у тој тачки заклапа са позитивним дијелом x −осе, из услова задатка добијамо

$$tg\alpha = 2x.$$



Слика 5.1

С друге стране, из геометријског значења извода, имамо да је

$$tg\alpha = y'(x).$$

Тако долазимо до диференцијалне једначине

$$y' = 2x.$$

Интеграцијом добијамо

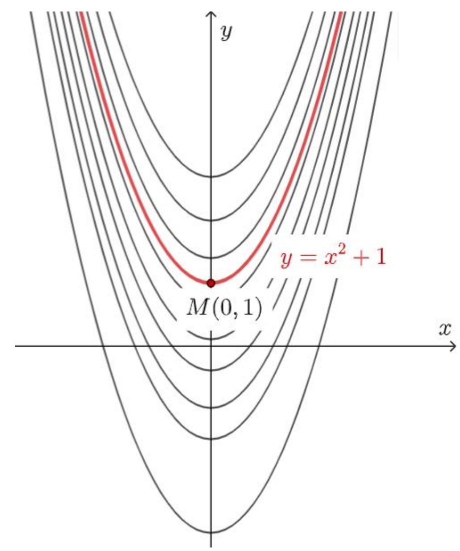
$$y = \int 2x dx = x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Дакле, фамилија свих рјешења једначине је фамилија парабола $y = x^2 + C$, гдје је C произвољан реалан број, Слика 5.2.

Да бисмо из фамилије парабола издвојили интегралну криву која пролази кроз тачку $M(0,1)$, уврштавамо почетне услове

$$x = 0 \text{ и } y = 1$$

у рјешење једначине. Добијамо $1 = C$ па је тражена интегрална крива парабола $y = x^2 + 1$. ◊



Слика 5.2

У овом примјеру смо полазећи од диференцијалне једначине одредили фамилију функција које су рјешења дате једначине. Поставља се и обрнут проблем: **за дату фамилију функција одредити једначину чије је рјешења дата фамилија функција.**

Примјер 5.5. Одредити диференцијалне једначине чија су рјешења фамилије функција

а) $y = Ce^{-2x}$, б) $y = C_1x + C_2e^x$.

Рјешење: а) Диференцирањем добијамо $y' = -2Ce^{-2x}$. Из система једначина

$$y = Ce^{-2x} \ \wedge \ y' = -2Ce^{-2x}$$

елиминишемо параметар C и добијамо диференцијалну једначину дате фамилије функција $y' = -2y$.

б) Диференцирамо два пута и добијамо систем

$$y = C_1x + C_2e^x \ \wedge \ y' = C_1 + C_2e^x \ \wedge \ y'' = C_2e^x$$

из којег елиминишемо параметре C_1 и C_2. Добијамо једначину $(x+1)y'' + xy' - y = 0$. ◊

Већ смо навели да се многе физичке појаве описују помоћу диференцијалних једначина које представљају математичке моделе тих појава. Тако нпр. једначина

$$\frac{dm}{dt} = km$$

гдје је $m = m(t)$ количина радиоактивне материје у тренутку t и k коефицијент пропорционалности који карактерише врсту материје, представља математички модел брзине распада радиоактивне материје.

Ако се сва рјешења једначине могу изразити помоћу елементарних функција, кажемо да се та једначина може **ријешити помоћу елементарних функција**. Уколико се једначина не може ријешити помоћу елементарних функција, али се сва њена рјешења могу изразити помоћу неодређених интеграла елементарних функција, онда кажемо да је та једначина **ријешена у квадратурама**. За једначину која се може ријешити помоћу елементарних функција или у квадратурама кажемо да се **може ријешити у коначном облику.**

5.2. ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРВОГ РЕДА

5.2.1. Основни појмови

Дефиницију диференцијалне једначине првог реда добијамо из Дефиниције 5.1 за $n = 1$.

Диференцијална једначина првог реда је једначина облика

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5.2}$$

гдје је $F: X \to R,\ X \subset \mathbb{R}^3$ дата функција и извод y' се обавезно јавља у једначини.

Ако се једначина (5.2) може ријешити по y', записујемо је у **нормалном облику**

$$y' = f(x, y)$$

гдје је $f: D \to R, D \subset \mathbb{R}^2$ дата функција за коју се најчешће претпоставља да је непрекидна.

Ако није другачије наглашено, у наставку подразумијевамо да је скуп D **отворен и повезан.**

Упоредо са једначином у нормалном облику посматра се и њена **реципрочна једначина**, тј. једначина у којој је y независно промјенљива а $x(y)$ непозната функција

$$x' = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Зато се диференцијална једначина првог реда често записује у тзв. **симетричном облику**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

који обједињује записе једначине и њене реципрочне једначине.

Једначине првог реда имају по правилу више од једног рјешења. Тако једначина из Примјера 5.4 има бесконачно много рјешења облика $y = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$. Овом формулом обухваћена су сва рјешења једначине $y' = 2x$.

Представљање свих рјешења једначине у облику фамилије функција коју записујемо помоћу једног или више параметара доводи до појма општег рјешења једначине.

Дефиниција 5.4. *Кажемо да је фамилија функција*

$$y = g(x, C)$$

дефинисаних на интервалу I, ***опште рјешење*** *диференцијалне једначине $y' = f(x, y)$ на I ако постоји скуп $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ такав да је функција $y = g_C(x) = g(x, C)$ рјешење те једначине на I ако и само ако је $C \in A$.*

Дакле, **опште рјешење једначине првог реда представља фамилију рјешења која зависе од једног параметра**. Важно је напоменути да је често немогуће доказати да нека фамилија функција укључује сва рјешења једначине, тако да се дефиниција општег рјешења базира на фамилији рјешења која не мора, али најчешће представља фамилију свих рјешења те једначине.

Рјешење једначине из Примјера 5.4 је опште рјешење те једначине, при чему је $A = \mathbb{R}$. Обично ће скуп вриједности параметра C бити скуп $\mathbb{R}$ и говорићемо да је C произвољан реалан број.

Опште рјешење диференцијалне једначине се може добити и у имплицитном облику

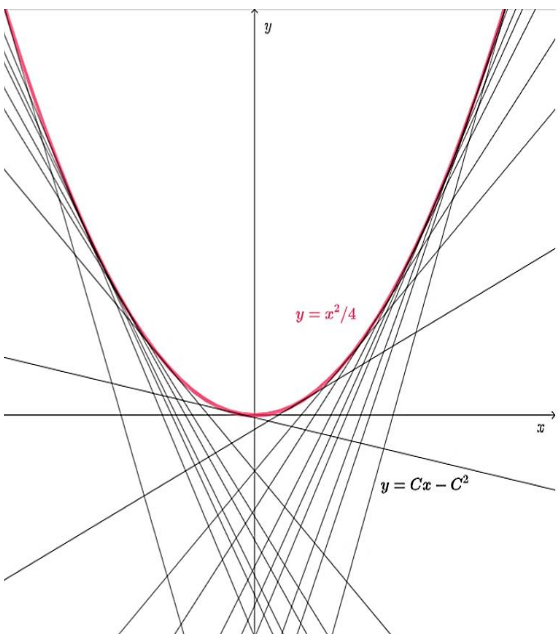
$$G(x, y, C) = 0, \qquad (x, y) \in G \subset \mathbb{R}^2,$$

као и у параметарском облику

$$x = x(t, C),\ \ y = y(t, C), \qquad a < t < b.$$

Дефиниција 5.5. *Рјешење диференцијалне једначине које се добија из општег рјешења за неку вриједност параметра C (укључујући и $C = \pm\infty$) се назива* ***партикуларно рјешење.***

Рјешење $y = x^2 + C,\ \ C \in \mathbb{R}$ једначине $y' = 2x$ из Примјера 5.4 је опште рјешење које садржи сва рјешења те једначине, док је $y = x^2 + 1$ партикуларно рјешење које се добија из општег за вриједност параметра $C = 1$.



Слика 5.3

Већ смо напоменули да **опште рјешење не мора да садржи сва рјешења једначине** што илуструје сљедећи примјер.

Примјер 5.7. Опште рјешење једначине

$$y'^2 - xy' + y = 0$$

је фамилија правих

$$y = Cx - C^2.$$

Рјешење ове једначине је и функција

$$y = \frac{x^2}{4}$$

која се не може добити из општег рјешења ни за једну вриједност константе C, укључујући и $C = \pm\infty$, Слика 5.3. ◊

У пракси се често јавља потреба за одређивањем рјешења једначине које има одређену вриједност у датој тачки. Проблем одређивања оваквог рјешења се назива **Кошијев задатак**.

Дефиниција 5.6. ***Кошијев задатак*** *за једначину првог реда у нормалном облику гласи:*
За дату тачку $(x_0, y_0) \in D$ *одредити рјешење диференцијалне једначине*

$$y' = f(x, y), \qquad (x, y) \in D \tag{5.3}$$

дефинисано у некој околини тачке x_0, *које задовољава услов*

$$y(x_0) = y_0. \tag{5.4}$$

Услов (5.4) се назива **почетни услов.**

Рјешење Кошијевог задатка **постоји** ако постоји интервал I који садржи x_0 и ако постоји функција дефинисана I која је рјешење једначине (5.3) и која задовољава почетни услов (5.4).

Геометријски, ријешити Кошијев задатак (5.3)-(5.4) значи одредити интегралну криву диференцијалне једначине (5.3) која пролази кроз тачку $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$.

Може се десити да Кошијев задатак има тачно једно рјешење, више од једног рјешења или да нема ниједно рјешење. Дефинишемо појам **јединствености** рјешења Кошијевог задатка.

Дефиниција 5.7. *Кажемо да Кошијев задатак* ***има јединствено рјешење*** *ако постоји околина тачке* x_0 *у којој се поклапају сва рјешења једначине (5.3) која задовољавају почетни услов (5.4).*

У директној вези са појмом јединствености рјешења Кошијевог задатка је појам **области егзистенције и јединствености рјешења** диференцијалне једначине.

Дефиниција 5.8. ***Област егзистенције и јединствености*** *рјешења диференецијалне једначине* $y' = f(x, y)$ *је скуп* G *свих тачака* $(x_0, y_0) \in D$ *за које Кошијев задатак* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ *има јединствено рјешење.*

Показује се да опште рјешење једначине (5.3) садржи сва рјешења Кошијевог задатка (5.3)-(5.4) таквог да (x_0, y_0) припада G, тј. **рјешења Кошијевог задатка** $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$, $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$, $\boldsymbol{(x_0, y_0) \in G}$, **су партикуларна рјешења те једначине.**

У примјеру 5.7 смо видјели да постоје рјешења једначине која се не могу добити из општег рјешења ни за једну вриједност параметра C (укључујући и $C = \pm\infty$). Из претходних разматрања закључујемо да у том случају Кошијев задатак (5.3)-(5.4) нема јединствено рјешење. Таква рјешења зовемо **сингуларним рјешењима.**

Дефиниција 5.9. *Рјешење диференцијалне једначине које има особину да кроз сваку тачку његове интегралне криве пролази бар још једна интегрална крива те једначине, назива се* ***сингуларно рјешење диференцијалне једначине.***

Тако је рјешење $y = \frac{x^2}{4}$ једначине из Примјера 5.7 сингуларно рјешење те једначине.

Тачку (x_0, y_0) у чијој околини Кошијев задатак (5.3)-(5.4) има јединствено рјешење називамо **обичном тачком**, у противном ту тачку називамо **сингуларном тачком.** Јасно је да је интегрална крива партикуларног рјешења сачињена од обичних тачака, док је интегрална крива сингуларног рјешења сачињена од сингуларних тачака.

5.2.2. Егзистенција и јединственост рјешења Кошијевог задатка

Поред метода рјешавања, најважнији дио теорије диференцијалних једначина је питање под којим условима Кошијев задатак има рјешење, те под којим условима је то рјешење јединствено. Ова питања су од изузетне важности и у случају када се једначине рјешавају неком нумеричком методом.

О егзистенцији рјешења Кошијевог задатка (5.3)-(5.4) говори Пеанова[1] теорема.

Теорема 5.1. (Пеанова теорема) *Ако је функција* f *непрекидна на* D *и* $(x_0, y_0) \in D$, *тада Кошијев задатак (5.3)-(5.4) има рјешење.*

Уочимо да Пеанова теорема даје довољне услове за егзистенцију рјешења, али не гарантује и његову јединственост. Јединственост рјешења Кошијевог задатка ће бити обезбијеђена уколико је, поред функције f, непрекидан и парцијани извод $\frac{\partial f}{\partial y}$ о чему говори сљедећа теорема.

Теорема 5.2. *Ако су функције* f *и* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *непрекидне на* D *и* $(x_0, y_0) \in D$, *тада Кошијев задатак (5.3)-(5.4) има јединствено рјешење.*

Јединственост рјешења Кошијевог задатка гарантује и Пикарова[2] теорема.

[1] Giuseppe Peano (1858 –1932), италијански математичар
[2] Charles Émile Picard (1856 –1941), француски математичар

Теорема 5.3. (Пикарова теорема) *Нека су испуњени услови:*

1) функција f је непрекидна на D,

2) $(\exists K > 0) \quad (\forall (x, y) \in D) \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq K$ *и*

3) $(x_0, y_0) \in D$.

Тада Кошијев задатак (5.3)-(5.4) има јединствено рјешење.

Имајући у виду да сингуларна рјешења једначине представљају нејединствена рјешења одговарајућег Кошијевог задатка, из претходне теореме закључујемо да сингуларна рјешења, уколико постоје, треба тражити међу оним рјешењима за која је $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \to \infty, (x, y) \to (x_0, y_0)$.

Уочимо да су услови у Теореми 5.3 довољни, али не и потребни за јединственост рјешења. То даје могућност да се ови услови замијене слабијим условима. Конкретно, услов ограничености функције $\frac{\partial f}{\partial y}$ се може замијенити Липшицовим[3] условом по промјенљивој y.

Кажемо да функција f задовољава ***Липшицов услов по промјенљивој y*** *на D ако постоји константа $L > 0$ тако да за свако $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ вриједи неједнакост*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Овај услов је слабији у односу на услов ограничености парцијалног извода, пошто из ограничености парцијалног извода слиједи да функција испуњава Липшицов услов, док обрнуто не вриједи.

[3] Rudolf Lipschitz (1832-1903), њемачки математичар

Примјер 5.10. а) Функција $f(x,y) = y^2 sinx + e^x$ задовољава Липшицов услов по промјенљивој y на скупу $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$ јер је за $(x, y_1), (x, y_2) \in D$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2||sinx| \leq 2a|y_1 - y_2|$$

па је Липшицов услов испуњен за $L = 2a$.

Примједба 5.2. Уколико су услови који гарантују јединственост рјешења испуњени на правоугаонику R: $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$, онда је рјешење једначине дефинисано бар на интервалу $|x - x_0| < \alpha$, гдје је $\alpha = min\left\{a, \frac{b}{K}\right\}$ и K је број за који је $|f(x,y)| \leq K$ на R.

Примјер 5.11. Испитати да ли Кошијев задатак

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 0$$

има рјешење на правоугаонику R: $|x| < 5, |y| < 3$, и ако има да ли је оно јединствено.

Рјешење: На правоугаонику R вриједи

$$|f(x,y)| = 1 + y^2 \leq 10 = K, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2|y| \leq 6 = L.$$

Функција $f(x,y) = 1 + y^2$ је непрекидна и ограничена на R па овај Кошијев задатак има бар једно рјешење које је дефинисано бар на интервалу $|x| < \alpha$, $\alpha = \min\left\{5, \frac{3}{10}\right\} = 0.3$. Пошто је и функција $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидна и ограничена на R, рјешење Кошијевог задатка је јединствено и дефинисано бар на интревалу $(-0.3,\ 0.3)$. ◊

У наставку разматрамо методе за рјешавање диференцијалних једначина првог реда које се могу ријешити у коначном облику. Универзалан метод за рјешавање не постоји већ је начин рјешавања условљен типом или обликом диференцијалне једначине.

5.2.3. Непотпуне једначине

Непотпуна диференцијална једначина је једначина облика

$$y' = f(x) \tag{5.5}$$

гдје је f дата непрекидна функција на интервалу I. Област егзистенције и јединствености рјешења ове једначине је $G = I \times \mathbb{R}$.

Сва рјешења ове једначине се могу записати у облику

$$y = \int f(x)dx,$$

односно у облику

$$y = F(x) + C$$

гдје је F примитивна функција функције f и C произвољан реалан број. Овом формулом је дато **опште рјешење** једначине (5.5).

Примјер 5.12. Одредити опште рјешење једначине $y' = 1 + cosx$.

Рјешење: Функција $f(x) = 1 + cosx$ је непрекидна па је и интеграбилна на $\mathbb{R}$. Опште рјешење је

$$y = \int (1 + cosx)dx = x + sinx + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \lozenge$$

Показали смо да је функција $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ примитивна функција непрекидне функције f на $[a, b]$. То значи да опште рјешење једначине (5.5) можемо записати у облику

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C \tag{5.6}$$

гдје је x_0 фиксиран број из интервала I. Из (5.6) за $x = x_0$ добијамо $y(x_0) = C$, па рјешење једначине (5.5) које испуњава почетни услов $y(x_0) = y_0$ можемо писати у облику

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0 \tag{5.7}$$

Рјешење (5.7) је рјешење Кошијевог задатка $y' = f(x),\ \ y(x_0) = y_0$.

5.2.4. Диференцијалне једначине са раздвојеним промјенљивим

Диференцијална једначина са раздвојеним промјенљивим у нормалном облику је једначина

$$y' = P(x) \cdot Q(y) \tag{5.8}$$

Уколико су функције P и Q непрекидне, интеграцијом у (5.8) добијамо имплицитни облик општег рјешења једначине

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx + C. \tag{5.9}$$

Рјешење Кошијевог задатка за једначину (5.8) са почетним условом $y(x_0) = y_0$ одређујемо тако да из фамилије општег рјешења (5.9) одредимо партикуларно рјешење која задовољава дати почетни услов. Добијамо да је рјешење Кошијевог задатка дато са

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{Q(t)} = \int_{x_0}^{x} P(t)dt.$$

Ако су функције P и Q непрекидне на интервалима I и J респективно, тада је област егзистенције и јединствености рјешења једначине (5.9) дата са

$$G = \{(x_0, y_0) |\, x_0 \in I, \quad y_0 \in J, \quad Q(y_0) \neq 0\}.$$

Диференцијалну једначину са раздвојеним промјенљивим често представљамо и у симетричном облику

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Ако претпоставимо да су функције p и q непрекидне, тада је опште рјешење једначине (у имплицитном облику) дато са

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx + C,$$

док је рјешење Кошијевог задатка са почетним условом $y(x_0) = y_0$ дато са

$$\int_{y_0}^{y} q(t)dt = \int_{x_0}^{x} p(t)dt.$$

Примјер 5.13. Одредити опште рјешење једначине $y' = -2xy$.

Рјешење: а) Трансформишемо једначину у симетрични облик

$$\frac{dy}{y} = -2xdx, \quad y \neq 0$$

одакле интеграцијом добијамо

$$\ln|y| = -x^2 + \hat{C}, \qquad \hat{C} \in \mathbb{R}.$$

Одавде је

$$|y| = e^{-x^2+\hat{C}},$$

и ако ставимо $e^{\hat{C}} = |C|, \quad C \neq 0$ добијамо

$$|y| = |C|e^{-x^2},$$

тј.

$$y = Ce^{-x^2}, \quad C \neq 0.$$

Пошто смо у току рјешавања диференцијалне једначине претпоставили да је $y \neq 0$, провјеравамо да ли је функција $y = 0$ рјешење једначине. Уврштавањем у једначину добијамо идентитет што значи да је $y = 0$ такође рјешење једначине. Ово рјешење је партикуларно рјешење једначине јер га добијамо из рјешења $y = Ce^{-x^2}$ за $C = 0$. Према томе, опште рјешење једначине је

$$y = Ce^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Примјер 5.14. Ријешити Кошијев задатак

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Рјешење: На почетку одређујемо опште рјешење једначине. Представљањем једначине у симетричном облику добијамо

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}, \qquad y \neq 0.$$

Одавде је

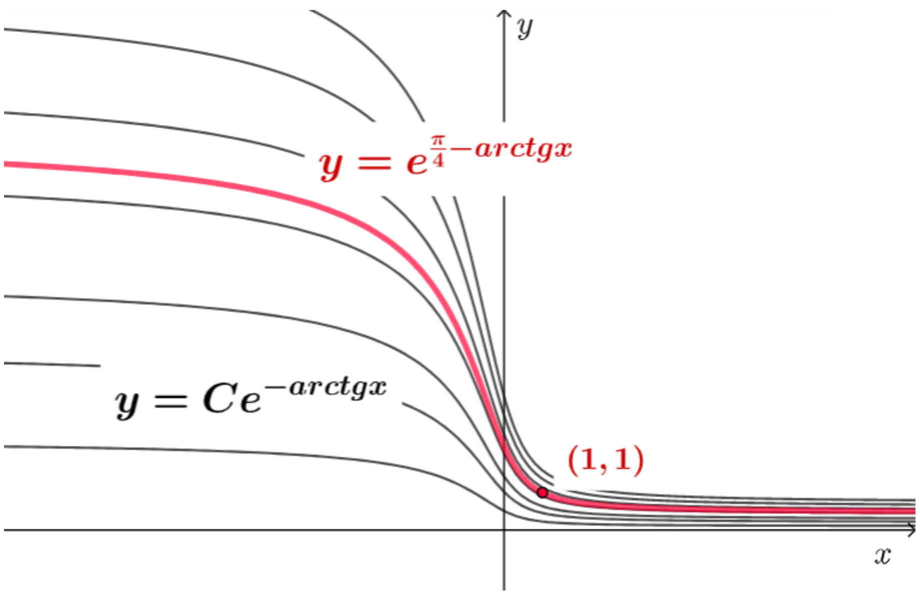
$$\ln|y| = -arctgx + \ln|C|, \qquad C \neq 0$$

односно

$$|y| = |C|e^{-arctgx}.$$

Добијамо опште рјешење

$$y = Ce^{-arctgx}, \qquad C \neq 0.$$



Слика 5.7

Увршtавањем функције $y = 0$ у дату једначину добијамо да је и ова функција рјешење једначине, па је опште рјешење дате једначине фамилија функција

$$y = Ce^{-arctgx}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

Слика 5.7. Рјешење Кошијевог задатка је партикуларно рјешење које се добија из општег за дате почетне услове. Уврштавајући $x = 1,\ y = 1$ у опште рјешење добијамо

$$1 = Ce^{-arctg1} = Ce^{-\frac{\pi}{4}} \Rightarrow C = e^{\frac{\pi}{4}},$$

па је рјешење Кошијевог задатка функција

$$y = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-arctgx} = e^{\frac{\pi}{4}-arctgx}. \ \lozenge$$

5.2.5. Једначина облика $y' = f(ax + by + c)$

Једначина облика

$$y' = f(ax + by + c) \tag{5.10}$$

гдје су a, b, c константе, се своди на једначину са раздвојеним промјенљивим. Ако је $a = 0$ или $b = 0$ једначина (5.10) је једначина са раздвојеним промјенљивим. Зато претпостављамо да је $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Уводимо смјену

$$ax + by + c = u$$

гдје је $u = u(x)$ нова функција промјенљиве x. Диференцирањем добијамо

$$a + by' = u' \Rightarrow y' = \frac{u' - a}{b}.$$

Уврштавањем у (5.10) добијамо

$$\frac{u' - a}{b} = f(u)$$

тј. једначину са раздвојеним промјенљивим

$$u' = bf(u) + a.$$

Одавде је

$$\frac{du}{bf(u) + a} = dx, \quad bf(u) + a \neq 0$$

одакле интеграцијом долазимо до општег рјешења.

Ако је
$$bf(u) + a = 0$$
тада је
$$u' = 0 \Rightarrow u = C \Rightarrow bf(C) + a = 0.$$
Према томе, рјешење једначине у овом случају је
$$ax + by + c = u \Rightarrow y = \frac{u-c}{b} - \frac{a}{b}x = \frac{C-c}{b} - \frac{a}{b}x$$
гдје је $bf(C) + a = 0$.

Примјер 5.17. Одредити опште рјешење једначине
$$y' = 2\sqrt{y-x} + 1, \qquad y \geq x, \qquad y' \geq 1\,.$$
Рјешење: Ово је једначина облика (5.10) за $a = -1, b = 1, c = 0$. Уводимо смјену
$$y - x = u \Rightarrow y' = u' + 1.$$
Уврштавањем у дату једначину добијамо једначину са раздвојеним промјенљивим
$$u' = 2\sqrt{u}, \qquad u \geq 0, \qquad u' \geq 0.$$
Имамо
$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = dx, \qquad u \neq 0$$
одакле добијамо
$$\sqrt{u} = x + C.$$
Опште рјешење ове једначине је
$$u = (x + C)^2, \qquad x \geq -C,$$
Слика 5.11.

Ако је $u = 0$, уврштавањем у једначину добијамо идентитет па је $u = 0$ такође рјешење једначине. Ово рјешење се не може добити из оптштег ни за једну вриједност константе C, укључујући и $C = \pm\infty$.

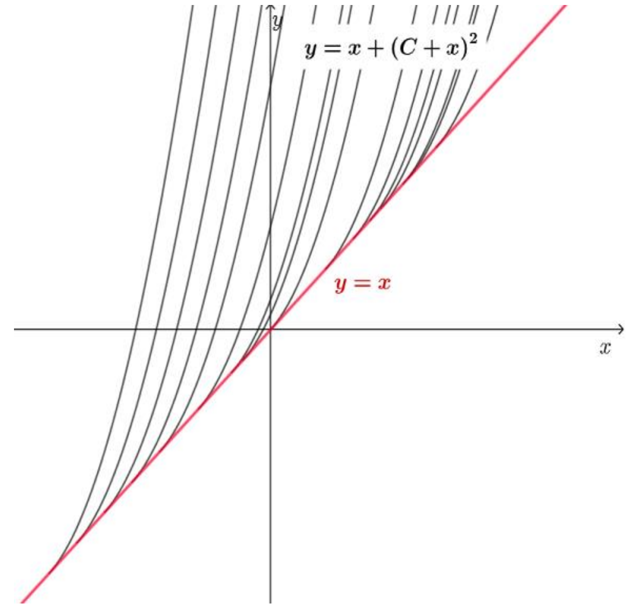
Зато је $u = 0$ сингуларно рјешење једначине.

Враћањем на промјенљиву y добијамо опште рјешење једначине

$$y = (x + C)^2 + x, \qquad x \geq -C,$$

и сингуларно рјешење

$$y = x. \ \lozenge$$



Слика 5.11.

5.2.6. Хомогена једначина

Функцију $f(x, y)$ која има особину да за неки реалан број r и произвољно a вриједи

$$f(ax, ay) = a^r f(x, y),$$

називамо **хомогена функција са степеном хомогености r.**

Хомогена једначина је једначина облика

$$y' = f(x, y) \tag{5.11}$$

гдје је f хомогена функција са нултим степеном хомогености.

Уочимо да за хомогену функцију f са нултим степеном хомогености за произвољно a вриједи

$$f(ax, ay) = f(x, y).$$

Узимајући у претходној једнакости $a = 1/x$ добијамо

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

одакле закључујемо да је хомогена функција двије промјенљиве са степеном хомогености нула, заправо функција једне реалне промјенљиве $\frac{y}{x}$. Зато се хомогена диференцијална једначина обично дефинише на сљедећи начин:

Диференцијална једначина облика

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5.12}$$

гдје је φ функција једне промјенљиве, се назива **хомогена диференцијална једначина.**

Ова једначина се смјеном

$$\frac{y}{x} = u$$

гдје је $u = u(x)$ нова функција промјенљиве x, своди на једначину са раздвојеним промјенљивим. Заиста, из $y = ux$ добијамо

$$y' = u + u'x$$

и уврштавањем у једначину (5.12) добијамо једначину

$$u'x = \varphi(u) - u.$$

Трансформацијом ове једначине у симетрични облик добијамо

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad x \neq 0, \;\; \varphi(u) - u \neq 0.$$

Рјешавањем ове једначине и враћањем смјене $y = ux$ добијамо опште рјешење једначине (5.12).

Ако је $\varphi(u) - u = 0$ тада је

$$u'x = 0 \Rightarrow u = C,$$

па је у овом случају опште рјешење једначине (5.12) облика

$$y = Cx.$$

Ако је $\varphi(u) - u = 0$ за $u = u_0 = const,$ тада је

$$y = u_0 x$$

рјешење једначине (5.12) које може бити и сингуларно.

Примјер 5.18. Наћи опште рјешење диференцијалне једначине

$$y' = \frac{2x + y}{x - 2y}.$$

Одредити оно рјешење једначине које задовољава почетни услов $y(1) = 0$.

Рјешење: Дата једначина је хомогена јер је

$$y' = \frac{2 + \frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}}.$$

Увођењем смјене

$$\frac{y}{x} = u, \quad y' = u + u'x$$

добијамо

$$u + u'x = \frac{2+u}{1-2u} \Rightarrow u'x = 2\frac{1+u^2}{1-2u},$$

тј.

$$\frac{1-2u}{1+u^2}du = 2\frac{dx}{x}, \quad x \neq 0.$$

Интеграцијом добијамо

$$e^{arctgu} = Cx^2(1+u^2), \;\; C > 0,$$

па је опште рјешење дате једначине

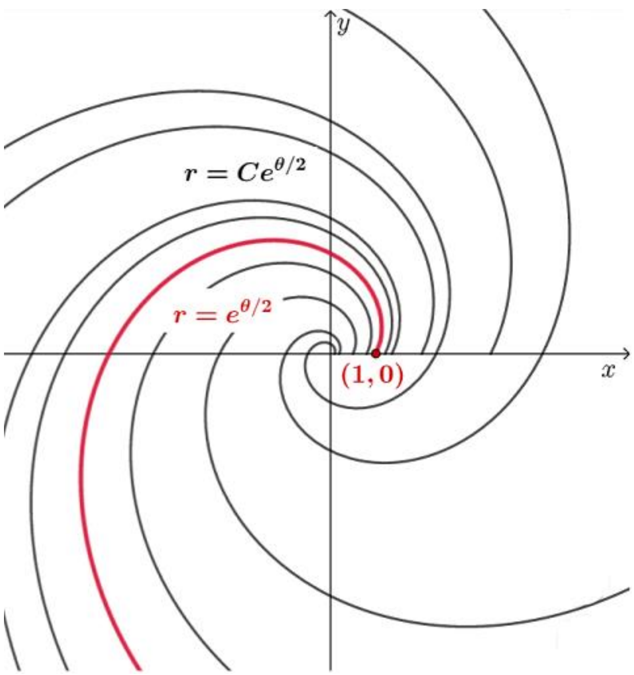
$$e^{arctg\frac{y}{x}} = C(x^2+y^2), \quad x \neq 0, \;\; C > 0.$$

Интегралне криве једначине су логаритамске спирале (Слика 5.12) чије су једначине у поларним координатама $r = Ce^{\frac{\theta}{2}}, \;\; C > 0$.

Уврштавањем почетних услова $x = 1, \;\; y = 0$ у опште рјешење једначине добијамо $C = 1$, па је партикуларно рјешење једначине у имплицитном облику дато са

$$e^{arctg\frac{y}{x}} = x^2 + y^2, \qquad x \neq 0.$$

У овом случају тачка $(0,0)$ је сингуларна тачка једначине.◊



Слика 5.12

Једначина облика

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{5.13}$$

гдје су $a_i, b_i, c_i,\ i = 1,2$ реалне константе, одговарајућим смјенама своди се или на једначину са раздвојеним промјенљивим или на хомогену једначину.

Ако је $c_1 = c_2 = 0$ тада је ова једначина хомогена. Зато разматрамо случај када је бар једна од константи c_1 и c_2 различита од нула ($|c_1| + |c_2| \neq 0$). Разликујемо два случаја:

1) Нека је $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$ Ако је $|a_1| + |a_2| = 0$ или $|b_1| + |b_2| = 0,$ тада је једначина (5.13) једначина са раздвојеним промјенљивим. Због тога претпостављамо да је бар једна од константи a_1 и a_2 различита од нула и бар једна од константи b_1 и b_2 различита од нула. Без губљења на општости можемо да претпоставимо да је $a_1 \neq 0$ и $b_1 \neq 0.$ Тада је

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = t$$

за неко $t \in \mathbb{R},$ па је $a_2 = t a_1$ и $b_2 = t b_1.$ Одавде добијамо да је $a_2 x + b_2 y = t(a_1 x + b_1 y)$ па је једначина (5.13) облика

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{t(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right) = g(a_1 x + b_1 y).$$

Према томе, у овом случају се једначина своди на једначину облика (5.10) која се даље смјеном

$$u = a_1 x + b_1 y$$

гдје је $u = u(x)$ функција промјенљиве x, своди на једначину са раздвојеним промјенљивим.

2) Нека је $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тада систем

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

има јединствено рјешење (α, β). Уводимо смјену

$$x = u + \alpha, \qquad y = v + \beta$$

и једначину (5.13) сводимо на једначину облика

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = g\left(\frac{v}{u}\right)$$

тј. на хомогену једначину.

Примјер 5.19. Наћи опште рјешење једначине $y' = -\frac{x+y+2}{2x+2y-1}$.

Рјешење: Пошто је $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, уводимо смјену $y + x = u \Rightarrow y' = -1 + u'$. Добијамо једначину са раздвојеним промјенљивим

$$u' = \frac{u-3}{2u-1} \Rightarrow \frac{2u-1}{u-3}du = dx, \;\; u \neq 3.$$

Опште рјешење ове једначине је

$$2u + 5\ln|u-3| = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}, \;\; u \neq 3.$$

Лако се види да је $u = 3$ такође рјешење једначине које се добија из општег за $C = -\infty$. Према томе, опште рјешење једначине је

$$5\ln|x + y - 3| + \; x + 2y = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

док је рјешење $y = 3 - x$ партикуларно рјешење које се добија из општег за $C = -\infty$. ◊

Примјер 5.20. Одредити интегралну криву једначине $y' = \frac{x+y-2}{y-x-4}$ која пролази кроз тачку $(1,1)$.

Рјешење: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Рјешење система

$$x + y - 2 = 0$$

$$y - x - 4 = 0$$

је $(\alpha, \beta) = (-1,3)$, па уводимо смјену

$$x = u - 1, \qquad y = v + 3.$$

Одавде је

$$dx = du, \quad dy = dv \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}.$$

Уврштавањем добијамо хомогену једначину

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{v-u} = \frac{1 + \frac{v}{u}}{\frac{v}{u} - 1}.$$

Смјеном

$$\frac{v}{u} = t, \qquad v' = t + ut'$$

$t = t(u)$ функција промјенљиве u, добијамо једначину

$$ut' = \frac{-t^2 + 2t + 1}{t - 1}.$$

Симетрични облик ове једначине је

$$\frac{t-1}{t^2 - 2t - 1} dt = -\frac{du}{u}, \qquad t^2 - 2t - 1 \neq 0, \qquad u \neq 0.$$

Опште рјешење ове једначине је

$$(t^2 - 2t - 1)u^2 = C, \quad C \neq 0.$$

За $C = 0$ добија се $t = 1 \pm \sqrt{2}$ и лако се провјерава да су ове функције такође рјешење једначине. Према томе опште рјешење једначине је

$$v^2 - 2uv - u^2 = C, \ C \in \mathbb{R},$$

односно

$$y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x = C, \ C \in \mathbb{R}.$$

За $x = 1, y = 1$ добијамо $C = -6$ па је партикуларно рјешење

$$y^2 - x^2 - 2xy - 8y + 4x + 6 = 0. \ \lozenge$$

5.2.7. Егзактна диференцијална једначина

Диференцијална једначина

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.14}$$

у којој израз $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ представља тотални диференцијал неке функције $u = u(x,y)$, се назива **егзактна диференцијална једначина** или **једначина са тоталним диференцијалом.**

У наставку претпостављамо да су функције $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрекидне на просто повезаном скупу D [4] и да је $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$ за свако $(x,y) \in D$.

[4] Кажемо да је скуп D **просто повезан** ако се дуж која спаја било које двије тачке из тог скупа налази у D.

Дакле, ако је једначина (5.14) егзактна на D, тада је

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du$$

за неку функцију $u=u(x,y)$, па је она облика

$$du=0.$$

Одавде добијамо да је опште рјешење једначине (5.14) на D дато са

$$u(x,y)=C,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Дакле, рјешавање егзактне једначине се своди на одређивање функције $u(x,y)$.

Примјер 5.21. Једначина

$$(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=0$$

је егзактна једначина јер је израз $(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy$ тотални диференцијал функције

$$u(x,y)=x^2y+xy^2, \text{ тј.}$$

$$(y^2+2xy)dx+(x^2+2xy)dy=d(x^2y+xy^2).$$

Према томе једначину записујемо у облику

$$d(x^2y+xy^2)=0$$

одакле добијамо опште рјешење

$$x^2y+xy^2=C,\qquad C\in\mathbb{R}.\ \ \lozenge$$

Пошто се рјешавање егзектне једначине своди на одређивање функције $u(x,y)$, за почетак је потребно препознати када постоји функција таква да израз $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ представља њен тотални диференцијал, тј. када је диференцијална једначина егзактна. Потребни и довољни услови за егзактност диференцијалне једначине (5.14) су дати у сљедећој теореми.

Теорема 5.4. *Нека су функције* $M(x,y)$ и $N(x,y)$ *непрекидно диференцијабилне на* D. *Да би једначина (5.14) била егзактна, потребно је и довољно да на* D *вриједи*

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5.15}$$

Доказ: а) Покажимо да је услов (5.15) потребан, тј. претпоставимо да је једначина (5.14) егзактна једначина. Тада је на D

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du$$

за неку функцију $u=u(x,y)$, тј. $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$. Одавде добијамо

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

Пошто су функције $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$ непрекидне, то значи да су мјешовити изводи функције u, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, такође непрекидни па су они на основу Теореме 3.14 једнаки. Закључујемо да на D вриједи услов $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, тј. услов (5.15) је потребан за егзактност диференцијалне једначине (5.14).

б) Покажимо да је услов (5.15) довољан, тј. претпоставимо да вриједи (5.15) и покажимо да тада постоји функција u таква да је

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=du$$

односно $\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$. Нека је (x_0,y_0) произвољна тачка из D. Интеграцијом по промјенљивој x у првој једнакости, добијамо еквивалентну једнакост

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + g(y) \tag{5.16}$$

гдје је g произвољна функција која зависи само од промјенљиве y. Функцију g даље одређујемо из услова $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$. Диференцирањем у (5.16) по y добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt + g'(y).$$

Даље из претпоставке (5.15) добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dt + g'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y).$$

Изједначавањем парцијалних извода $\frac{\partial u}{\partial y}$ добијамо

$$N(x,y) - N(x_0,y) + g'(y) = N(x,y) \Rightarrow g'(y) = N(x_0,y)$$

тј. $g(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C$. Дакле, за функцију

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C \tag{5.17}$$

вриједи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y),$$

односно

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du$$

па смо показали да је једначина (5.14) егзактна. Теорема је доказана. □

Примједба 5.3. Уочимо да смо приликом доказа претходне теореме одредили и функцију $u(x,y)$ чији је тотални диференцијал једнак $M(x,y)dx + N(x,y)dy$, а самим тим и опште рјешење посматране једначине. Дакле, из (5.17) добијамо да је опште рјешење егзактне диференцијалне једначине (5.14) дато са

$$\int_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt = C$$

при чему је (x_0, y_0) произвољна тачка из скупа D.

Примјер 5.22. Наћи опште рјешење једначине

$$(e^x + y + siny)dx + (e^y + x + xcosy)dy = 0.$$

Рјешење: $M(x,y) = e^x + y + siny,\quad N(x,y) = e^y + x + xcosy$. Пошто је

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + cosy \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 + cosy$$

испуњен је услов (5.15) па је на основу Теореме 5.4 дата једначина егзактна. Дакле постоји функција u таква да је

$$(e^x + y + siny)dx + (e^y + x + xcosy)dy = du.$$

Функцију u одређујемо коришћењем формуле (5.17), при чему можемо узети $x_0 = y_0 = 0$. Имамо

$$u(x,y) = \int_0^x (e^t + y + siny)dt + \int_0^y e^t dt + C = e^x - 1 + yx + xsiny + e^y - 1 + C.$$

Опште рјешење једначине је

$$e^x + e^y + xy + xsiny = C. \ \lozenge$$

❖ Интеграциони фактор

У неким случајевима се диференцијалне једначине које нису егзактне могу трансформисати у еквивалентне егзактне диференцијалне једначине. Најчешћа трансформација којом се постиже облик егзактне једначине је множење једначине одговарајућом ненула функцијом. Функцију $\lambda(x, y)$ којом множимо једначину зовемо **интеграциони фактор** једначине.

Примјер 5.23. Диференцијална једначина

$$\frac{x}{y}dx + dy = 0$$

није егзактна једначина. Међутим, множењем једначине функцијом $\lambda(x, y) = y$ добијамо једначину

$$xdx + ydy = 0$$

која јесте егзактна јер је $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0$. Дакле, у овом случају интеграциони фактор може бити функција $\lambda(x, y) = y$. ◊

Интеграциони фактор није јединствено одређен. Међутим, за рјешавање једначине довољно је познавати бар један интеграциони фактор и у наставку показујемо како га можемо одредити. Множењем једначине

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

функцијом $\lambda(x, y)$, добијамо еквивалентну диференцијалну једначину

$$\lambda(x, y)M(x, y)dx + \lambda(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Да би функција $\lambda(x, y)$ била интеграциони фактор једначине, она мора да буде егзактна.

То на основу Теореме 5.4 значи да мора бити испуњен услов

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial y}=\frac{\partial(\lambda N)}{\partial x},$$

тј.

$$\lambda\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\lambda\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial\lambda}{\partial x}. \tag{5.18}$$

Дакле, за одређивање интеграционог фактора треба ријешити парцијалну диференцијалну једначину (5.18) што је у општем случају теже него ријешити почетну једначину. Зато разматрамо специјалне случајеве када се рјешавање једначине (5.18) поједностављује.

Ако претпоставимо да је интеграциони фактор функција једне промјенљиве $\lambda=\lambda(t)$, гдје је $t=t(x,y)$ дата функција, тада једначина (5.18) постаје

$$\lambda\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}=\lambda\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial t}{\partial x},$$

односно

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial t}{\partial x}-M\dfrac{\partial t}{\partial y}}. \tag{5.19}$$

Када је израз са десне стране у (5.19) функција промјенљиве t, нпр. $\mu(t)$, тада се може одредити интеграциони фактор облика $\lambda=\lambda(t)$. Тада добијамо једначину са раздвојеним промјенљивим

$$\frac{d\lambda}{\lambda}=\mu(t)dt$$

па је

$$\lambda(t) = e^{\int \mu(t)dt}. \tag{5.20}$$

Специјално, ако је $t = x$ тада из (5.19) добијамо

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{5.21}$$

па једначина има интеграциони фактор облика $\lambda = \lambda(x)$ ако је десна страна једначине (5.21) функција промјенљиве x. Ако је $t = y$ тада из (5.19) добијамо

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \tag{5.22}$$

па једначина има интеграциони фактор облика $\lambda = \lambda(y)$ ако је десна страна једначине (5.22) функција промјенљиве y.

Примјер 5.24. Ријешити једначину $(4x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$.

Рјешење: Пошто је $\frac{\partial M}{\partial y} = 6y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2y$ дата једначина није егзактна. Провјеримо да ли она има интеграциони фактор облика $\lambda = \lambda(x)$. Уврштавањем у (5.21) добијамо

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{4y}{2xy} = \frac{2}{x} \Rightarrow \lambda = Cx^2, \ C \in \mathbb{R}.$$

Довољно је узети једно партикуларно рјешење, нпр. $\lambda(x) = x^2$. Множењем дате једначине интеграционим фактором добијамо егзактну једначину

$$(4x^3 + 3x^2y^2)dx + 2x^3ydy = 0.$$

Опште рјешење једначине је $x^4 + x^3y^2 = C$. ◊

5.2.8. Линеарне диференцијалне једначине

Једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{5.23}$$

гдје су $p(x)$ и $q(x)$ дате функције, назива се **линеарна диференцијална једначина**.

Уочимо да се за $p(x) = 0$ једначина (5.23) трансформише у непотпуну диференцијалну једначину, док за $q(x) = 0$ једначина прелази у облик једначине са раздвојеним промјенљивим.

Ако је $q(x) = 0$ кажемо да је једначина (5.23) **хомогена.** У супротном, кажемо да је једначина **нехомогена.**

За одређивање општег рјешења једначине (5.23) прво одређујемо рјешење хомогене једначине

$$y' + p(x)y = 0. \tag{5.24}$$

Једначина (5.24) је једначина са раздвојеним промјенљивим

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \;\; y \neq 0$$

тј.

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|, \;\; C \neq 0.$$

Одавде је

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0.$$

Пошто је и $y = 0$ рјешење једначине (5.24), њено опште рјешење записујемо у облику

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5.25}$$

Формула (5.25) садржи сва рјешења једначине (5.24) тако да она нема сингуларних рјешења.

Опште рјешење једначине (5.23) одређујемо **Лагранжовом методом или методом варијације параметра.** Примјеном ове методе опште рјешење нехомогене једначине тражимо у облику

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{5.26}$$

гдје је $C(x)$ непрекидно диференцијабилна функција. Диференцирањем у (5.26) и уврштавањем у једначину (5.23) добијамо

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

па је

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Уврштавањем у (5.26) добијамо **опште рјешење линеарне једначине** (5.23)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right), \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{5.27}$$

Опште рјешење линеарне једначине можемо одредити користећи и неке друге методе, као што су нпр. Ојлеров метод интеграционог фактора или Бернулијев метод смјене. [5]

Примјер 5.25. Ријешити Кошијев задатак $y'sinx - ycosx = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

[5] Видјети Примједбу 2.2 у Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*

Рјешење: Имамо

$$y' - yctgx = \frac{1}{sinx}.$$

Из формуле (5.27) добијамо опште рјешење

$$y = e^{\int \frac{cosx}{sinx}dx}\left(C + \int \frac{1}{sinx} e^{-\int \frac{cosx}{sinx}dx} dx\right) = e^{\ln|sinx|}\left(C + \int \frac{1}{sinx} e^{-\ln|sinx|} dx\right) =$$

$$sinx\left(C + \int \frac{1}{sin^2x} dx\right) = sinx(C - ctgx) = Csinx - cosx, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Уочимо да смо приликом рјешавања једначине писали да је $e^{\ln|sinx|} = sinx$ и $e^{-\ln|sinx|} = \frac{1}{sinx}$, занемарујући при том знак апсолутне вриједности. Овакав поступак је коректан јер су у рјешењу до којег се долази овим поступком садржана сва рјешења једначне. Заиста, за $sinx < 0$ би било $e^{\ln|sinx|} = -sinx$ и $e^{-\ln|sinx|} = -\frac{1}{sinx}$ па бисмо имали

$$y = -sinx\left(C - \int \frac{1}{sin^2x} dx\right) = -sinx(C + ctgx), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Пошто је C произвољна реална константа, стављајући у горњу једнакост константу $(-C)$ умјесто константе C добијамо

$$y = -sinx(-C + ctgx) = sinx(C - ctgx)$$

тј. исти облик рјешења једначине. Одредимо још партикуларно рјешење које задовољава дати почетни услов. Уврштавањем почетних услова у опште рјешење добијамо $C = 0$, па је рјешење Кошијевог задатка

$$y = -cosx. \;\; \lozenge$$

5.2.9. Бернулијева диференцијална једначина

Једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \ \alpha \neq 0,\ \ \alpha \neq 1) \tag{5.28}$$

гдје су $p(x)$ и $q(x)$ дате функције и α реалан параметар, назива се **Бернулијева[6] једначина.** Ова једначина се одговарајућом смјеном своди на линерну једначину.

Очигледно је једначина (5.28) за $\alpha = 0$ линеарна једначина, док за $\alpha = 1$ има облик једначине са раздвојеним промјенљивим. Уколико једначину (5.28) подијелимо са y^{α} добијамо

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{1}{y^{\alpha-1}} = q(x).$$

Уводимо смјену

$$\frac{1}{y^{\alpha-1}} = z$$

гдје је $z = z(x)$ нова непозната функција. Тада је

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Пошто је

$$\frac{(1-\alpha)y'}{y^{\alpha}} = z' \Rightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{z'}{1-\alpha},$$

почетна једначина прелази у облик

[6] Jakob Bernoulli (1655 - 1705.), швајцарски математичар

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x),$$

односно у облик линеарне диференцијалне једначине

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x).$$

Из (5.27) добијамо опште рјешење ове једначине

$$z = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left(C + (1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx\right),$$

па је опште рјешење Бернулијеве једначине (5.28) дато са

$$y = \left(e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left(C + (1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ако је $\alpha > 0$ функција $y = 0$ је рјешење једначине (5.28), и то за $\alpha > 1$ партикуларно рјешење (добија се из општег за $C = \infty$) и за $0 < \alpha < 1$ сингуларно (не може се добити из општег ни за једну вриједност параметра C).

Примјер 5.26. Наћи опште рјешење једначине

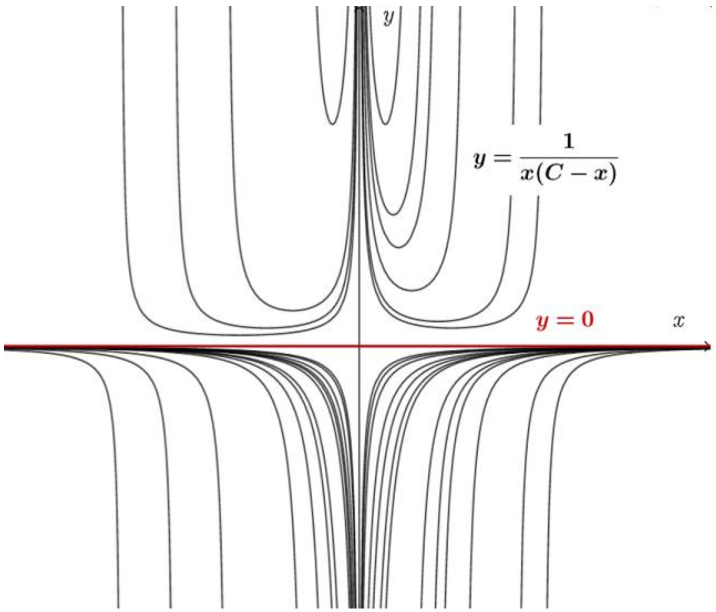
$$y' + \frac{y}{x} = xy^2.$$

Рјешење: Дата једначина је Бернулијева једначина за $\alpha = 2$. Након дијељења са y^2 добијамо

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x.$$

Уводимо смјену

$$\frac{1}{y} = z \Rightarrow -\frac{y'}{y^2} = z'.$$



Слика 5.13

Добијамо

$$z' - \frac{z}{x} = -x$$

па је

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C - \int x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx\right) = x(C - x).$$

Одавде добијамо опште рјешење једначине

$$y = \frac{1}{x(C - x)}.$$

Уочимо да је у овом случају $y = 0$ партикуларно рјешење једначине ($\alpha = 2 > 1$) које се добија из општег за $C = \infty$, Слика 5.13. ◊

Примјер 5.27. Наћи опште рјешење једначине

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y.$$

Рјешење: Дата једначина је облика

$$y' - 4\frac{y}{x} = 2x\sqrt{y}, \quad y \geq 0,$$

тј. Бернулијева једначина за $\alpha = 1/2$. Након дијељења са $\sqrt{y}$ добијамо

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - 4\frac{\sqrt{y}}{x} = 2x, \quad y > 0.$$

Уводимо смјену

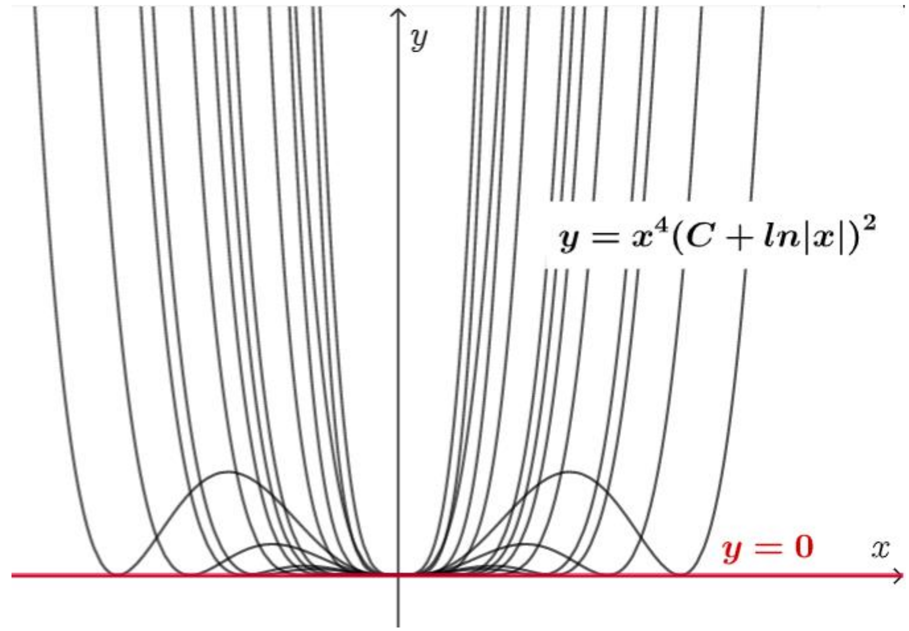
$$\sqrt{y} = z \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} = z'.$$

Уврштавањем у једначину добијамо линеарну једначину

$$z' - 2\frac{z}{x} = x$$

чије је опште рјешење

$$z = e^{2\int\frac{dx}{x}}\left(C + \int xe^{-2\int\frac{dx}{x}}dx\right) = x^2(C + \ln|x|).$$



Слика 5.14

Добијамо

$$\sqrt{y} = x^2(C + \ln|x|) \Rightarrow y = x^4(C + \ln|x|)^2, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Пошто је $\alpha = 1/2$ знамо да је $y = 0$ рјешење једначине (што се лако добије уврштавањем у почетну једначину) и то сингуларно рјешење, Слика 5.14. ◊

5.2.12. Приближно рјешавање Кошијевог задатка

Уколико Кошијев задатак није могуће ријешити или се његово рјешавање сувише компликује, користе се методе за приближно рјешавање. Помоћу ових метода долазимо до приближног рјешења које у неком смислу апроксимира рјешење Кошијевог задатка.

Постоји више метода за приближно рјешавање Кошијевих задатка, а овдје наводимо **Пикаров итерациони метод.**

Посматрајмо Кошијев задатак

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad (x_0, y_0) \in D \tag{5.31}$$

при чему претпостављамо да је функција f непрекидна на D и да на D задовољава Липшицов услов по промјенљивој y са константом L. На почетку овог поглавља смо претпоставили да је D отворен скуп, па постоји правоугаоник садржан у D тако да је (x_0, y_0) његова унутрашња тачка. Тада можемо одредити број α тако да је рјешење посматраног Кошијевог задатка дефинисано бар на интервалу $|x - x_0| < \alpha$.[7]

Интеграцијом у (5.31) по првој промјенљивој добијамо интегралну једначину која је еквивалентна посматраном Кошијевом задатку

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{5.32}$$

Пикаров итерациони метод подразумијева одређивање приближног рјешења интегралне једначине (5.32) помоћу тзв. **метода узастопних апроксимација**. Овом методом се конструише низ функција које конвергирају ка рјешењу интегралне једначине (5.32).

За први елемент низа или почетну апроксимацију се узима произвољна функција $y_0(x)$ која је непрекидна на $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha\,]$ и за коју је $y_0(x_0) = y_0$. Најчешће за почетну апроксимацију узимамо константну функцију $y_0(x) = y_0$.

[7] Видјети Примједбу 5.2

Помоћу ње одређујемо други елемент или другу апроксимацију $y_1(x)$:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt.$$

Затим одређујемо сљедећу апроксимацију $y_2(x)$:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_1(t)\big)\, dt.$$

Настављајући овај поступак, конструишемо низ чији n −ти елемент или n −ту апроксимацију одређујемо из претходног елемента помоћу једнакости

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y_{n-1}(t)\big)\, dt.$$

На овај начин добијамо низ функција $\big(y_n(x)\big)$ које су непрекидне на I и задовољавају услов $y_n(x_0) = y_0$. Овај низ функција конвергира ка функцији $y(x)$ која је једино рјешење једначине (5.32) на I.

За оцјену грешке, тј. одступања n-те апроксимације од рјешења Кошијевог задатка, се добија

$$|y_n(x) - y(x)| \leq K \frac{L^n \alpha^{n+1}}{(n+1)!}, \quad x \in I$$

гдје је K број за који је $|f(x,y)| \leq K$ на посматраном правоугаонику. Пошто је

$$\lim_{n\to\infty} K \frac{L^n \alpha^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

након довољног броја корака можемо добити приближно рјешење са произвољном тачношћу.

Примјер 5.31. Помоћу Пикарове методе одредити трећу апроксимацију рјешења Кошијевог задатка

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

на правоугаонику $R: |x| \leq 2, \ |y| \leq 2$ и оцијенити грешку.

Рјешење: У овом случају је на R $|f(x,y)| = x^2 + y^2 \leq 8$, тј. $K = 8$. За $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ имамо

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \ |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq 4|y_1 - y_2|$$

па је $L = 4$. Добијамо $\alpha = min\left\{a, \frac{b}{K}\right\} = min\left\{2, \frac{2}{8}\right\} = \frac{1}{4}$ па посматрамо низ итерација на сегменту $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Имамо

$$y_0(x) = 0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (t^2 + (y_0(t))^2)\, dt = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x (t^2 + (y_1(t))^2)\, dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_0^x \left(t^2 + \left(y_2(t)\right)^2\right) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{2t^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{63^2}\right) dt$$

па добијамо

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{11 \cdot 189} + \frac{x^{15}}{15 \cdot 63^2}.$$

За оцјену грешке имамо

$$|y_3(x) - \ y(x)| \leq 8 \frac{4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^4}{(4)!} = \frac{1}{12}, \quad x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]. \ \lozenge$$

5.2.13. Једначине које нису ријешене у односу на извод

Диференцијалне једначине првог реда $F(x, y, y') = 0$, у којима није могуће на јединствен начин изразити y' помоћу x и y, називају се једначине првог реда нерјешиве по првом изводу или једначине нису ријешене у односу на извод. Овакве једначине није могуће трансформисати у еквивалентну једначину нормалног облика што значајно усложњава њихово рјешавање.

Диференцијалне једначине из ове класе једначина се по правилу рјешавају одговарајућом смјеном или параметризацијом. Најчешће уводимо параметар p помоћу $y' = p$.

❖ Лагранжова једначина

Диференцијална једначина облика

$$y = xg(y') + f(y') \tag{5.33}$$

гдје су f и g дате диференцијабилне функције и $g(u) \not\equiv u$, назива се **Лагранжова једначина.**

За рјешавање ове једначине уводимо смјену $y' = p$. Увршtавањем у (5.33) добијамо

$$y = xg(p) + f(p).$$

Одавде диференцирањем по x добијамо

$$p = g(p) + xg'(p)p' + f'(p)p'$$

тј.

$$p - g(p) = \left(xg'(p) + f'(p)\right)\frac{dp}{dx}.$$

Узимајући да је $x = x(p)$ непозната функција добијамо

$$\left(p - g(p)\right)\frac{dx}{dp} = xg'(p) + f'(p)$$

тј. линеарну једначину

$$x'_p - \frac{g'(p)}{p - g(p)}x = \frac{f'(p)}{p - g(p)}, \qquad p - g(p) \neq 0.$$

Рјешавањем ове једначине добијамо опште рјешење $x = x(p, C)$, односно опште рјешење Лагранжове једначине у параметарском облику

$$x = x(p, C), \quad y = x(p, C)g(p) + f(p).$$

Ако је $p - g(p) = 0$ за неку вриједност $p = p_0$, тада је и функција

$$y = xg(p_0) + f(p_0)$$

рјешење Лагранжове једначине које може бити и сингуларно.

Примјер 5.33. Ријешити једначину

$$y = 2xy' - \ln y', \qquad y' > 0.$$

Рјешење: Уврштавањем $y' = p$ у једначину добијамо

$$y = 2xp - \ln p, \;\; p > 0.$$

Диференцирањем по x добијамо

$$p = 2p + 2xp' - \frac{p'}{p},$$

тј.

$$-p = \left(2x - \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx}.$$

Узимајући да је $x = x(p)$ одавде добијамо линеарну једначину

$$x' + \frac{2x}{p} = \frac{1}{p^2}, \qquad p > 0$$

чије је опште рјешење

$$x(p, C) = \frac{1}{p} + \frac{C}{p^2}$$

Одавде добијамо опште рјешење дате једначине у параметарском облику

$$x = \frac{1}{p} + \frac{C}{p^2}, \qquad y = 2 - \ln p + \frac{2C}{p}, \;\; p > 0.$$

Једначина нема сингуларних рјешења. ◊

❖ Клероова једначина

Диференцијална једначина облика

$$y = xy' + f(y') \tag{5.34}$$

гдје је f дата диференцијабилна функција, назива се **Клероова једначина.**

Уочавамо да се Клероова једначина добија из Лагранжове једначине за случај када је $g(u) = u$.

Клероову једначину рјешавамо на исти начин као и Лагранжову, тј. увођењем параметра $y' = p$.

Из

$$y = xp + f(p)$$

диференцирањем по x добијамо

$$p = p + xp' + f'(p)p'$$

тј.

$$\left(x + f'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ако је

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

тада је $p = C$ па је опште рјешење Клероове једначине фамилија правих

$$y = xC + f(C).$$

Ако је

$$x + f'(p) = 0$$

тада добијамо рјешење представљено у параметарском облику

$$x = -f'(p), \qquad y = -pf'(p) + f(p)$$

које је најчешће сингуларно. У случају када је функција f два пута непрекидно диференцијабилна и $f(p) \not\equiv p,$ ово рјешење представља обвојницу фамилије правих из општег рјешења (уколико фамилија правих има обвојницу).[8]

[8] **Обвојница** фамилије кривих је крива која у свакој својој тачки додирује по једну криву из фамилије кривих и при том у различитим тачкама додирује различите криве.

Тако нпр. једначина из Примјера 5.7 је Клероова једначина јер је

$$y = xy' - y'^2.$$

Смјеном $y' = p$ добијамо

$$y = xp - p^2.$$

Диференцирањем по x добијамо

$$p = p + xp' - 2pp'$$

тј.

$$(x - 2p)\frac{dp}{dx} = 0.$$

За $\frac{dp}{dx} = 0$ добијамо $p = C$, па је опште рјешење једначине фамилија правих

$$y = Cx - C^2.$$

Ако је $x + 2p = 0$ тада је

$$x = 2p, \qquad y = p^2$$

рјешење једначине. Елиминацијом параметра p добијамо сингуларно рјешење у експлицитном облику

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Ова парабола представља обвојницу фамилије правих из општег рјешења, Слика 5.3.

Примјер 5.34. Ријешити једначину

$$y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}.$$

Рјешење: Смјеном $y' = p$ добијамо

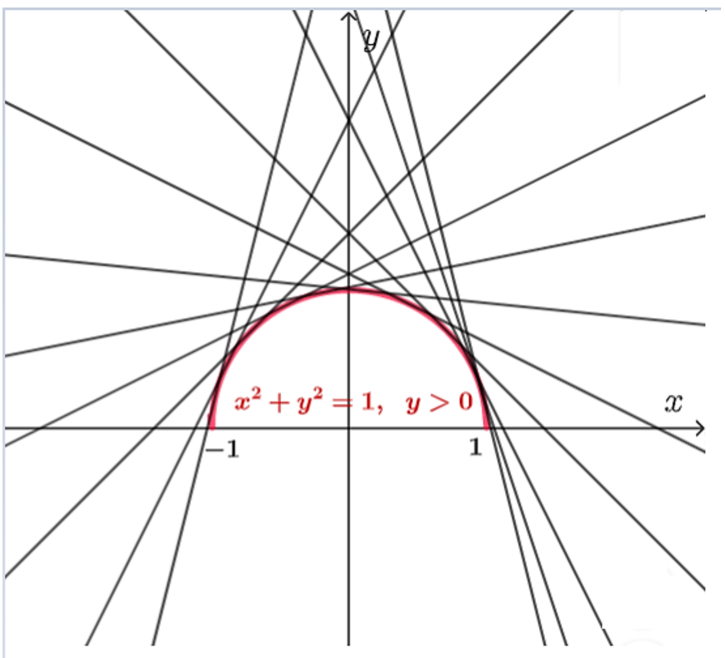
$$y = xp + \sqrt{1+p^2}.$$

Диференцирањем по x добијамо

$$p = p + xp' + \frac{pp'}{\sqrt{1+p^2}} \Rightarrow 0 = \left(x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\frac{dp}{dx}.$$

За $\frac{dp}{dx} = 0$ добијамо $p = C$, па је опште рјешење једначине фамилија правих

$$y = Cx + \sqrt{1+C^2}.$$



Слика 5.15

Ако је

$$x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

тада је

$$x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Елиминацијом параметра p добијамо сингуларно рјешење у имплицитном облику

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$

Ова полукружница представља обвојницу фамилије правих из општег рјешења, Слика 5.15 ◊

5.2.14. Изогоналне трајекторије

У пракси се често јавља проблем одређивања криве која има особину да под истим углом пресијеца сваку криву из дате фамилије кривих. Криве са наведеном особином се називају **изогоналне трајекторије** дате фамилије кривих. Присјетимо се да је угао под којим се сијеку двије криве заправо угао који заклапају тангенте ових кривих у њиховој пресјечној тачки.

Уколико је дата фамилија кривих која је опште рјешење диференцијалне једначине

$$F(x, y, y') = 0,$$

лако се може показати да је тада диференцијална једначина чије је опште рјешење фамилија изогоналних трајекторија које сијеку дату фамилију под углом $\alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$, облика

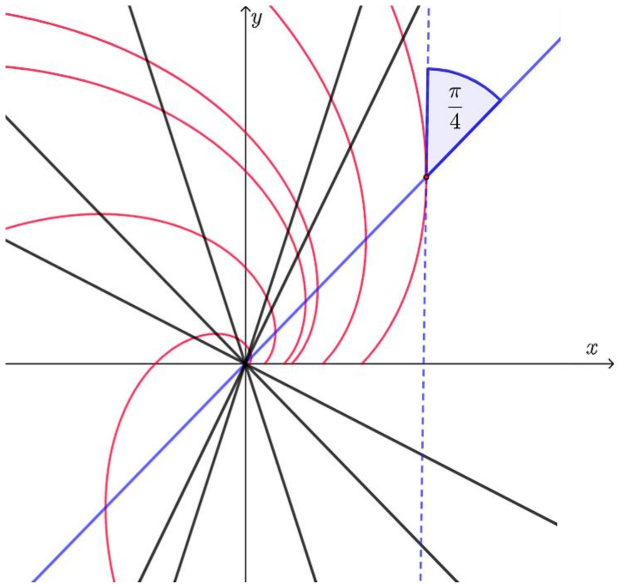
$$F\left(x, y, \frac{y' - tg\alpha}{1 + y' tg\alpha}\right) = 0. \qquad (5.35)$$

Примјер 5.35. Одредити фамилију изогоналних трајекторија које под углом $\alpha = \pi/4$ сијеку фамилију правих $y = Cx$.

Рјешење: Диференцирањем једнакости $y = Cx$ по x добијамо $y' = C$. Елиминацијом параметра C из ових једнакости добијамо диференцијалну једначину дате фамилије правих

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Пошто тражимо фамилију изогоналних трајекторија које под углом $\alpha = \pi/4$ сијеку ову фамилију кривих, из (5.35) добијамо да је диференцијална једначина чије је опште рјешење фамилија изогоналних трајекторија облика



Слика 5.16

$$\frac{y'-1}{1+y'}=\frac{y}{x}.$$

Није тешко уочити да је посљедња једначина заправо хомогена једначина

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

чије је опште рјешење фамилија изогоналних трајекторија

$$e^{2arctg\frac{y}{x}}=C(x^2+y^2),\quad x\neq 0,\ \ C>0,$$

Слика 5.16. ◊

Када је угао под којим фамилија изогоналних трајекторија сијече дату фамилију кривих једнак $\pi/2$, тада ову фамилију изогоналних трајекторија називамо фамилија **ортогоналних трајекторија.**

Нека је дата фамилија кривих $F(x,y,C)=0$ која представља фамилију интегралних кривих диференцијалне једначине

$$y'=f(x,y).$$

Примијетимо да је коефицијент правца тангенте на криву из фамилије $F(x,y,C)=0$ која пролази кроз тачку (x_0,y_0) те криве једнак $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$.

Коефицијент правца тангенте ортогоналне трајекторије у тачки (x_0, y_0), због ортогоналности тангенти, је једнак $\left(-\frac{1}{f(x_0,y_0)}\right)$. Имајући у виду да је тачка (x_0, y_0) произвољна, закључујемо да фамилија ортогоналних трајекторија представља фамилију интегралних кривих једначине

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{5.36}$$

Ортогоналне трајекторије су опште рјешење диференцијалне једначине (5.36).

Примјер 5.36. Одредити ортоганалне трајекторије фамилије парабола $y = Cx^2$.

Рјешење: Одређујемо диференцијалну једначину дате фамилије кривих. Диференцирањем добијамо $y' = 2Cx$ и елиминацијом параметра C из система једначина $y = Cx^2 \wedge y' = 2Cx$ добијамо

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

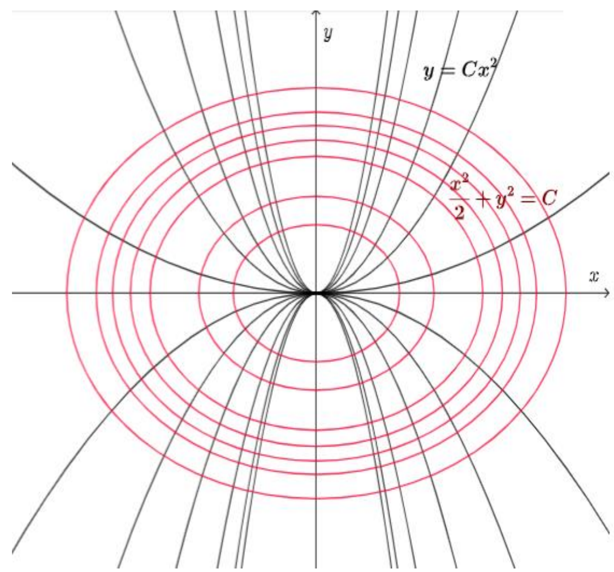
Уврштавајући у горњу једначину $\left(-\frac{1}{y'}\right)$ умјесто y' добијамо једначину ортогоналних трајекторија

$$y' = -\frac{x}{2y}, \quad y \neq 0,$$

чије је опште рјешење

$$y^2 + \frac{x^2}{2} = C, \qquad C > 0.$$

Ортогоналне трајекторије на фамилију парабола су елипсе, Слика 5.17. ◊



Слика 5.17.

5.3. ЛИНЕАРНА ЈЕДНАЧИНА n −тог РЕДА

Диференцијална једначина n −тог реда у нормалном облику је једначина

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{5.37}$$

гдје је $f\colon X \to R, X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ позната функција.

Основна подјела диференцијалних једначина n −тог реда је на линеарне и нелинеарне.

Линеарна диференцијална једначина n −тог реда је једначина облика

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x) \tag{5.38}$$

гдје су $p_i,\ i = 1,2, \dots n$ и r дате функције дефинисане на интервалу I.

Једначина n −тог реда која се не може записати у облику (5.38) је **нелинеарна једначина**.

Опште рјешење једначине n −тог реда представља **фамилију рјешења која зависе од n параметара** $C_1, C_2, \dots, C_n$ и дефинише се аналогно општем рјешењу диференцијалне једначине првог реда. Рјешење диференцијалне једначине које се добија из општег рјешења за неке вриједности параметара $C_1, C_2, \dots, C_n$ се назива **партикуларно рјешење.**

Најједноставнији облик линеарне диференцијалне једначине n −тог реда је једначина у којој је $p_n(x) \equiv p_{n-1}(x) \equiv \cdots \equiv p_{n-k}(x) \equiv 0,\ \ 0 \le k < n - 1$. Овакве једначине се називају **непотпуне линеарне диференцијалне једначине.** Стављајући $y^{(k+1)} = z$, гдје је $z = z(x)$ нова непозната функција, ред ове једначине се снижава за $k + 1$, тј. добијамо једначину $(n - k - 1)$ −тог реда.

Примјер 5.37. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + \frac{2y'}{x} = 0.$$

Рјешење: Посматрана једначина је непотпуна једначина другог реда коју рјешавамо помоћу смјене

$$y' = z, \qquad z = z(x).$$

Тада је $y'' = z'$, па добијамо једначину првог реда са раздвојеним промјенљивим

$$z' + \frac{2z}{x} = 0.$$

Имамо

$$\frac{dz}{z} = -\frac{2}{x}dx, \quad z \neq 0$$

односно

$$\ln|z| = -2\ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0.$$

Одавде је

$$z = \frac{C_1}{x^2}, \qquad C_1 \neq 0$$

а показује се да је и функција $z = 0$ која се добије за $C_1 = 0$ такође рјешење једначине. Дакле

$$y' = \frac{C_1}{x^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

одакле интеграцијом добијамо опште рјешење једначине

$$y = -\frac{C_1}{x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

Код диференцијалних једначина првог реда смо посматрали Кошијев задатак који представља одређивање оног рјешења једначине које задовољава дати почетни услов. Кошијев задатак који генерише диференцијална једначина n −тог реда захтијева сложеније почетне услове.

Кошијев задатак за диференцијалну једначину (5.37) гласи:

За дату тачку $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *одредити рјешење једначине*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

дефинисано у некој околини тачке x_0, *које задовољава почетне услове*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{5.39}$$

Рјешење Кошијевог задатка постоји ако постоји интервал I који садржи тачку x_0 и ако постоји функција дефинисана на том интервалу која је рјешење једначине (5.37) и која задовољава почетне услове (5.39).

Кошијев задатак има јединствено рјешење ако постоји околина тачке x_0 у којој се поклапају сва рјешења једначине (5.37) која задовољавају почетне услове (5.39).

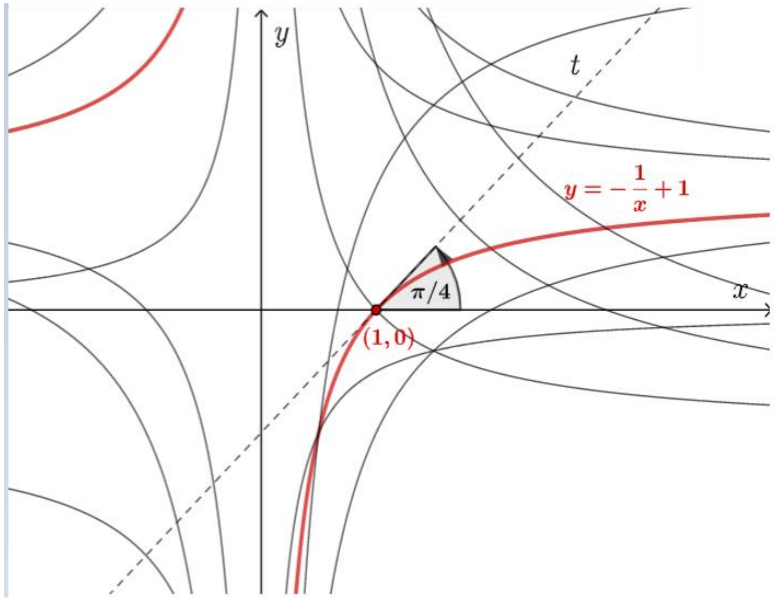
Примјер 5.38. Одредити оно рјешење диференцијалне једначине из Примјера 5.37 које задовољава почетне услове $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Рјешење: У Примјеру 5.37 одредили смо опште рјешење једначине

$$y = -\frac{C_1}{x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Уврштавамо почетне услове у опште рјешење и добијамо

$$y = -\frac{C_1}{x} + C_2 \ \wedge \ y(1) = 0 \Rightarrow 0 = -C_1 + C_2,$$



Слика 5.18.

$$y' = \frac{C_1}{x^2} \ \wedge \ y'(1) = 1 \Rightarrow 1 = C_1.$$

Одавде добијамо да је $C_1 = C_2 = 1$ па је рјешење Кошијевог задатка функција

$$y = -\frac{1}{x} + 1.$$

Геометријски, рјешење посматраног Кошијевог задатка представља интегралну криву која пролази кроз тачку $(1,0)$ и чија тангента у тој тачки са позитивним дијелом x −осе заклапа угао од $\frac{\pi}{4}$, Слика 5.18. ◊

У наставку посматрамо **Кошијев задатак за линеарну једначину** (5.38) који гласи:

За дату тачку $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in I \times \mathbb{R}^n$ *одредити рјешење диференцијалне једначине (5.38) дефинисано у некој околини тачке* x_0 *које задовољава почетне услове (5.39).*

Као и код једначина првог реда, посебно су значајни услови под којима рјешење Кошијевог задатка (5.38)-(5.39) постоји, као и услови који обезбјеђују јединственост тог рјешења.

Показује се да је непрекидност функција $p_i(x), i = 1, \dots n$ и $r(x)$ на интервалу I довољан услов за постојање и јединственост рјешења Кошијевог задатка на том интервалу. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 5.5. *Нека су функције $p_i(x), i = 1,2, \dots n$ и $r(x)$ у (5.38) непрекидне на интервалу I и нека је дата тачка $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in I \times \mathbb{R}^n$. Тада Кошијев задатак (5.38)-(5.39) има јединствено рјешење дефинисано на интервалу I.*

Ако је у (5.38) $r(x) \equiv 0$, добијамо **хомогену линеарну једначину n −тог реда**

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{5.40}$$

Ако је $r(x) \neq 0$, кажемо да је једначина (5.38) **нехомогена линеарна једначина n −тог реда.**

Лако се види да је функција $y(x) = 0$ рјешење хомогене једначине, те да није рјешење нехомогене једначине. Ово рјешење хомогене једначине се назива **тривијално рјешење**.

Сљедећа лема успоставља везу између рјешења хомогене и нехомогене линеарне једначине.

Лема 5.4. *1)* Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *рјешења нехомогене једначине (5.38) дефинисана на интервалу I, тада је функција $y_1(x) - y_2(x)$ рјешење хомогене једначине (5.40) на I.*

2) Ако је $y_p(x)$ рјешење нехомогене једначине (5.38) на интервалу I и $y_h(x)$ рјешење хомогене једначине (5.40) на интервалу I, тада је функција $y_p(x) + y_h(x)$ рјешење нехомогене једначине (5.38) на I.

Доказ: 1) Пошто су функције $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ рјешења једначине (5.38) на I, тада је за $x \in I$

$$y_1{}^{(n)} + p_1(x)y_1{}^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y_1 = r(x),$$

$$y_2{}^{(n)} + p_1(x)y_2{}^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y_2 = r(x).$$

Одузимањем горњих једнакости добијамо

$$(y_1 - y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 - y_2)^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)(y_1 - y_2) = 0$$

па је функција $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ рјешење хомогене једначине (5.40) на интервалу I.

2) Из претпоставке да су $y_h(x)$ и $y_p(x)$ рјешења хомогене једначине (5.40), односно нехомогене једначине (5.38) на I респективно, за $x \in I$ је

$$y_p{}^{(n)} + p_1(x)y_p{}^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y_p = r(x),$$

$$y_h{}^{(n)} + p_1(x)y_h{}^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y_h = 0.$$

Сабирањем горњих једнакости добијамо

$$(y_p + y_h)^{(n)} + p_1(x)(y_p + y_h)^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)(y_p + y_h) = r(x)$$

па је функција $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ рјешење нехомогене једначине (5.38) на I. □

5.3.1. Хомогена линеарна једначина n −тог реда

У наставку одређујемо опште рјешење хомогене једначине (5.40). Претпостављамо да су функције $p_i(x), i = 1, \ldots n$ непрекидне на I што на основу Теореме 5.5 значи да сваки Кошијев задатак (5.40)-(5.39) има јединствено рјешење које је такође дефинисано на том интервалу.

На почетку показујемо да је произвољна линеарна комбинација рјешења хомогене једначине такође рјешење те једначине.

Теорема 5.6. *Ако су функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ рјешења једначине (5.40) на интервалу I, тада је и функција*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

гдје су $C_1, \dots, C_n$ произвољне реалне константе, такође рјешење те једначине на I.

Доказ: Пошто су функције $y_1(x), \dots, y_n(x)$ рјешења једначине (5.40) на I, за $x \in I$ вриједи

$$y_k{}^{(n)} + p_1(x) y_k{}^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_k = 0, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Даље, за функцију $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ вриједи

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n)^{(n)} + p_1(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n)^{(n-1)} + \dots +$$
$$+ p_n(x) y_k (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) =$$
$$C_1\left(y_1{}^{(n)} + p_1(x) y_1{}^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_1\right) + C_2\left(y_2{}^{(n)} + p_1(x) y_2{}^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_2\right) \dots +$$
$$C_n\left(y_n{}^{(n)} + p_1(x) y_n{}^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_n\right) = 0$$

па је функција $y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$ такође рјешење једначне (5.40) на I. □

Уочимо да аналогно тврђење не вриједи за нехомогене једначине.

Из Теореме 5.6 закључујемо да се на основу n познатих рјешења хомогене једначине (5.40) може добити бесконачно много њених рјешења. Поставља се питање да ли се помоћу n произвољних рјешења једначине (5.40) могу добити сва рјешења те једначине? Показаћемо да је одговор на ово питање потврдан само у случају када рјешења једначине (5.40) задовољавају одређене услове. Да бисмо дефинисали те услове, на почетку уводимо појам линеарно независних функција не неком интервалу I.

Кажемо да су функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ **линеарано независне** на I ако је исказ

$$(\forall x \in I) \quad \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots \alpha_n y_n(x) = 0 \tag{5.41}$$

тачан само за $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ако функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ нису линеарно независне на I, тада кажемо да су оне **линеарно зависне** на I. Другим ријечима, функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ су линеарно зависне на I ако постоје реалне константе $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ од којих је бар једна различита од 0, за које је тачан исказ (5.41).

Није тешко примијетити да су функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линеарно зависне на I ако и само ако се бар једна од тих функција може на овом интервалу представити као линеарна комбинација преосталих функција.

Уколико посматрамо двије функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$, онда линеарна зависност ових функција на I значи да се једна од њих може на овом интервалу изразити преко друге, тј.

$$y_1 = -\frac{\beta}{\alpha} y_2 \quad \text{или} \quad y_2 = -\frac{\alpha}{\beta} y_1$$

у зависности од тога да ли је $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$. У овом случају количник $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ је константан онда када је дефинисан. Вриједи и обрнуто: ако количник $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ није константан (за вриједности промјенљиве за које је дефинисан), тада су функције $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линеарно независне на интервалу I.

У наставку показујемо да се помоћу n произвољних линеарно независних рјешења једначине (5.40) могу добити сва рјешења те једначине.За почетак се показује да постоји n линеарно независних рјешења једначине (5.40).

Лема 5.5. *Нека су функције $p_i(x), i = 1,2, \dots n$ непрекидне на интервалу I. Тада постоји n линеарно независних рјешења једначине (5.40) која су дефинисана на интервалу I.*

С обзиром да нам је циљ да покажемо да се помоћу n линеарно независних рјешења једначине (5.40) могу добити сва рјешења те једначине, поставља се питање на који начин се испитује линеарна независност рјешења једначине? Видјели смо да се линеарна независност двије функције може једноставно испитати само на основу дефиниције линеарне независности, што није случај за n функција, $n > 2$. За испитивање линеарне независности n рјешења хомогене линеарне диференцијалне једначине користи се ефикасан алгоритам који се заснива на детерминати Вронског.[9]

Детерминанта

$$W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {y_1}^{(n-1)} & {y_2}^{(n-1)} & \cdots & {y_n}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

се назива **детерминанта Вронског (вронскијан)** функција $y_1, y_2, \dots, y_n$.

[9] Józef Maria Hoëné-Wroński (1776 –1853), пољски филозоф и математичар

Теорема 5.7. *Нека су функције* $p_1, p_2, \dots, p_n$ *хомогене линеарне једначине (5.40) непрекидне на интервалу* I. *Да би рјешења* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *једначине (5.40) била линеарно независна на* I *потребно је и довољно да је* $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ *на* I.

Примједба 5.4. Показује се да је услов $W(x) = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ на I из Теореме 5.7 еквивалентан услову $(\exists x_0 \in I) \ \ W(x_0) \neq 0$.

У сљедећој теореми показујемо да се помоћу n линеарно независних рјешења једначине (5.40) могу добити сва рјешења те једначине.

Теорема 5.8. *Нека су функције* $p_i(x), i = 1,2, \dots n$ *непрекидне на интервалу* I *и нека су* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *линеарно независна рјешења хомогене линеарне једначине (5.40) на* I. *Тада је произвољно рјешење једначине (5.40) на* I *линеарна комбинација рјешења* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Дефиниција 5.10. *Ако су* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *линеарно независна рјешења хомогене једначине (5.40) на интервалу I, тада кажемо да они чине* ***базу*** *или* ***фундаментални систем*** *рјешења те једначине на* I.

Тако функције $y_1(x) = 1/x$ и $y_2(x) = 1$ чине фундаментални систем рјешења једначине из Примјера 5.37 на $I = (-\infty, 0)$ или на $I = (0, +\infty)$. Ове функције су линеарно независне на I јер је

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{1}{x} \neq const.$$

Из Теореме 5.8 добијамо да је опште рјешење једначине (5.40) на интервалу I линеарна комбинација функција које чине фундаментални систем рјешења. Дакле, ако функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ чине фундаментални систем рјешења једначине (5.40) на I, тада је опште рјешење те једначине на I функција

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

гдје су $C_1, C_2, \dots, C_n$ произвољне реалне константе.

Из Теореме 5.8 такође слиједи да хомогена линеарна једначина (5.40) нема сингуларних рјешења јер се сва рјешења једначине могу добити из њеног општег рјешења.

Примјер 5.39. Показати да функције $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = e^x$ чине фундаментални систем рјешења једначине

$$y''' - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} y'' + \frac{2x}{x^2 - 2x + 2} y' - \frac{2}{x^2 - 2x + 2} y = 0$$

на произвољном интервалу, па одредити опште рјешење једначине.

Рјешење: Уврштавањем у дату једначину показујемо да су функције y_1, y_2 и y_3 рјешења једначине. Како је

$$W(x) = W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

и $W(x) > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, закључујемо да су ова рјешења линеарно независна па чине фундаментални систем рјешења једначине. Опште рјешење једначине је $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^x$. ◊

5.3.2. Хомогена једначина n −тог реда са константним коефицијентима

Хомогена једначина n −тог реда са константним коефицијентима је једначина облика

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{5.42}$$

гдје су $a_1, a_2, \dots, a_n$ реалне константе.

Пошто су код ових једначина функције $p_i(x) = a_i,\ i = 1, \dots n$ непрекидне на $\mathbb{R}$, на основу Теореме 5.5 закључујемо да за произвољно $\left(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$, Кошијев задатак

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$
$$y(x_0) = y_0, \qquad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

има јединствено рјешење и да је то рјешење дефинисано на читавом скупу $\mathbb{R}$.

Имајући у виду да је опште рјешење једначине (5.42) одређено са n линеарно независних (партикуларних) рјешења те једначине, у наставку одређујемо фундаментални систем рјешења једначине (5.42). Тражимо рјешења једначине у облику

$$y = e^{\lambda x}$$

гдје је λ реалан параметар. [10] Уврштавањем у једначину (5.42) и дијелећи са $e^{\lambda x} \neq 0$, добијамо

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.} \tag{5.43}$$

[10] Опште рјешење хомогене једначине са константним коефицијентима првог реда $y' + ky = 0$ је фамилија функција $y = Ce^{-kx},\ C \in \mathbb{R}$, што је мотивација за тражење рјешења једначине (5.42) у облику $y = e^{\lambda x}$

Једначина (5.43) се назива **карактеристична једначина** једначине (5.42). Сваки коријен карактеристичне једначине (5.43) генерише једно рјешење диференцијалне једначине (5.42), при чему облик рјешења зависи од природе коријена карактеристичне једначине. Разликујемо сљедеће случајеве.

❖ Коријен карактеристичне једначине је реалан и вишеструкости један

Уколико је коријен карактеристичне једначине реалан број α вишеструкости један, тј. α је прост (или једноструки) коријен карактеристичне једначине, тада овај коријен генерише рјешење диференцијалне једначине (5.42) облика $y = e^{\alpha x}$.

Ако су сви коријени карактеристичне једначине (5.43) реални и једноструки, тада она има n различитих реалних коријена $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ којима одговарају рјешења

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ \ y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots,\ \ y_n = e^{\lambda_n x}$$

једначине (5.42). Може се показати да је у том случају $W(x) = W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ за $x \in \mathbb{R}$, па ове функције чине фундаментални систем рјешења. Опште рјешење једначине (5.42) је

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

❖ Коријен карактеристичне једначине је комплексан и вишеструкости један

Када је коријен карактеристичне једначине комплексан број $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, тада је њен коријен такође и комплексан број $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ (коњуговано комплексни коријени). Посматрајмо случај када су ови коријени прости. Тада су рјешења једначине (5.42) комплексне функције

$$\tilde{y}_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{и} \quad \tilde{y}_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

које можемо представити у облику

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}(cos\beta x + isin\beta x) \quad \text{и} \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}(cos\beta x - isin\beta x).$$

Пошто је на основу Теореме 5.6 свака линеарна комбинација рјешења хомогене једначине такође рјешење те једначине, функције

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{\alpha x}cos\beta x \quad \text{и} \quad y_2(x) = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{\alpha x}sin\beta x$$

су такође рјешења једначине (5.42). Ове функције су линеарно независне јер је

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{cos\beta x}{sin\beta x} = ctg\beta x \neq const, \; x \neq \frac{k\pi}{\beta}, k \in \mathbb{Z}.$$

Дакле, прост комплексан коријен карактеристичне једначине $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, заједно са одговарајућим конјуговано комплексним коријеном $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, генерише два линеарно независна рјешења диференцијалне једначине (5.42)

$$y_1(x) = e^{\alpha x}cos\beta x \quad \text{и} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}sin\beta x.$$

❖ Коријен карактеристичне једначине има вишеструкост већу од један

Нека је λ реалан коријен карактеристичне једначине вишеструкости m, $m > 1$. Тада заправо имамо m једнаких коријена карактеристичне једначине (коју су сви једнаки λ). Показаћемо да ових m (једнаких) коријена карактеристичне једначине генерише m линеарно независних рјешења једначине (5.42). Прво рјешење генерисано овим коријеном је $y_1(x) = e^{\lambda x}$. На основу овог рјешења одређујемо још $(m-1)$ рјешења $y_2, \dots, y_m$ једначине (5.42) тако да функције $y_1, y_2, \dots, y_m$ буду линеарно независне.

Поступак одређивања ових рјешења наводимо за случај линеарне једначине са константним коефицијентима другог реда

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Уочимо да је у том случају рјешење карактеристичне једначине $\lambda = -\frac{a_1}{2}$ и $y_1(x) = e^{-\frac{a_1}{2}x}$. Рјешење y_2 тражимо у облику

$$y_2(x) = y_1(x)u(x)$$

при чему функцију $u = u(x)$ одређујемо из услова да је y_2 рјешење посматране једначине. Увршставањем у једначину добијамо

$$y_1''u + 2y_1'u' + y_1 u'' + a_1 y_1' u + a_1 y_1 u' + a_2 y_1 u = 0$$

односно

$$u(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + 2y_1'u' + y_1 u'' + a_1 y_1 u' = 0$$

Пошто је $y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0$ добијамо

$$y_1 u'' + (2y_1' + a y_1)u' = 0.$$

Стављајући $u' = t,\ \ t = t(x)$, добијамо једначину првог реда са раздвојеним промјенљивим

$$y_1 t' + (2y_1' + a_1 y_1)t = 0,$$

чије је рјешење

$$\ln|t| = -a_1 x - 2\ln|y_1| + \ln|C| \ \Leftrightarrow \quad t = u' = \frac{C}{y_1^2} e^{-a_1 x}, \quad C \neq 0.$$

Одавде је

$$u(x) = C \int \frac{e^{-a_1 x}}{y_1^2} dx = C \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{-a_1 x}} dx = Cx.$$

Пошто је C произвољна константа, узимајући $C = 1$ добијамо

$$y_2(x) = y_1(x)x = xe^{\lambda x}.$$

Јасно је да су функције $y_1(x) = e^{\lambda x}$ и $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ линеарно независне.

Сада се на исти начин показује да реалан коријен λ вишеструкости m генерише m линеарно независних рјешења једначине (5.42)

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = xe^{\lambda x}, \dots,\ y_m = x^{m-1}e^{\lambda x}.$$

Уколико је $\lambda = \alpha + i\beta$ комплексан коријен карактеристичне једначине вишеструкости m, тада је и $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ коријен вишеструкости m. Напријед наведеним поступком лако се показује да ови комплексни коријени генеришу $2m$ линеарно независних рјешења једначине (5.42) облика

$$y_1(x) = e^{\alpha x}cos\beta x,\ y_2(x) = xe^{\alpha x}cos\beta x, \dots,\ y_m(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}cos\beta x,$$
$$y_{m+1}(x) = e^{\alpha x}sin\beta x,\ y_{m+2}(x) = xe^{\alpha x}sin\beta x, \dots\ y_{2m}(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}sin\beta x.$$

Из претходних разматрања смо видјели да у сваком од три наведена случаја рјешења карактеристичне једначине (5.43) генеришу скуп линеарно независних рјешења једначине (5.42) који има онолико елемената колика је вишеструкост коријена карактеристичне једначине. Може се показати да је скуп рјешења једначине (5.42) линеарно независан и у случају када садржи рјешења генерисана коријенима карактеристичне једначине независно од њихове природе, тј. у случају када су коријени карактеристичне једначине комбинација претходно наведених случајева.

Имајући у виду да карактеристична једначина има онолико коријена колики је ред диференцијалне једначине,[11] закључујемо да скуп рјешења диференцијалне једначине генерисан овим коријенима има онолико елемената колики је ред диференцијалне једначине, па овај скуп представља фундаментални систем рјешења једначине (5.24).

Примјер 5.40. Наћи опште рјешење једначина

а) $y'' + 4y = 0$, б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, в) $y'' + 2y' - 6y = 0$.

Рјешење: а) Коријени карактеристичне једначине $\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$ су $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_2 = -2i$. Тада функције $y_1 = cos2x$ и $y_2 = sin2x$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = C_1 cos2x + C_2 sin2x.$$

б) Карактеристична једначина $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$ има један реалан коријен $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Функције $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = xe^{-3x}$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x).$$

в) Коријени карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$ су $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 2$. Функције $y_1 = e^{-3x}$ и $y_2 = e^{2x}$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}. \ \lozenge$$

Примјер 5.41. Наћи опште рјешење једначина

а) $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$, б) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$.

[11] **Основна теорема алгебре**: Сваки полином степена $n \in \mathbb{N}$ има тачно n коријена у скупу комплексних бројева, при чему се сваки коријен рачуна онолико пута колико износи његова вишеструкост

Рјешење: а) Корijени карактеристичне једначине $\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)=0$ су $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=-1, \lambda_3=3$. Функције $y_1=e^x, y_2=e^{-x}, y_3=e^{3x}$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y=C_1e^x\ +C_2e^{-x}+C_3e^{3x}.$$

б) Корijени карактеристичне једначине $\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=(\lambda-1)(\lambda-1-i)(\lambda-1+i)=0$ су $\lambda_1=1$ и $\lambda_{2,3}=1\pm i$. Функције $y_1=e^x$, $y_2=e^x cosx, y_3=e^x sinx$ чине фундаментални систем рјешења па је опште рјешење

$$y=C_1e^x\ +C_2e^x cosx+C_3e^x sinx. \ \lozenge$$

Поред Кошијевог задатка, у примјенама линерних диференцијалних једначина се јављају и тзв. **гранични задаци.** Гранични задаци су генерисани диференцијалном једначином и додатним условима које називамо **гранични услови.** Гранични услови се разликују од почетних услова и по правилу се односе на вриједности функције у граничним тачкама интервала на којем посматрамо диференцијалну једначину.

Примјер 5.42. На сегменту $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ одредити рјешење граничног задатка

$$y''-2y'+2y=0, \qquad y(0)=-3, \quad y(\pi/2)=0.$$

Рјешење: Корijени карактеристичне једначине $\lambda^2-2\lambda+2=0$ су $\lambda_{1,2}=1\pm i$. Опште рјешење једначине је $y=e^x(C_1cosx\ +C_2sinx)$. Из граничних услова добијамо

$$y(0)=-3\Rightarrow -3=C_1, \quad y(\pi/2)=0\Rightarrow 0=C_2e^{\pi/2}$$

па је рјешење граничног задатка

$$y=-3e^x cosx. \ \lozenge$$

Једначина облика

$$(ax+b)^n y^{(n)} + c_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1}(ax+b)y' + c_n y = 0 \tag{5.44}$$

гдје су $a, b, c_i, i = 1,2,\dots,n$ реалне константе и $a \neq 0$, назива се **Ојлер-Кошијева једначина *n*-тог реда**.

Увођењем смјене $ax+b=e^t$, гдје је t нова независна промјенљива и $z(t) = y\left(\frac{e^t-b}{a}\right)$ нова непозната функција, Ојлер-Кошијева диференцијална једначина (5.44) трансформише у хомогену диференцијалну једначину са константним коефицијентима.

Примјер 5.44. Наћи опште рјешење једначине

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Рјешење: Помоћу смјене $x = e^t, z(t) = y(e^t)$ добијамо

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-t}z' \Rightarrow xy' = az',$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{d(e^{-t}z')}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-2t}(z''-z') \Rightarrow x^2y'' = z''-z',$$

па се посматрана диференцијална једначина трансформише у једначину

$$z'' - z' - 4z' + 6z = 0,$$

чије је опште рјешење

$$z(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}.$$

Враћајући смјену $t = \ln x$, добијамо да је опште рјешење почетне једначине

$$y(x) = C_1e^{2\ln x} + C_2e^{3\ln x} = C_1x^2 + C_2x^3.$$

5.3.4. Нехомогена линеарна једначина n –тог реда

Посматрамо нехомогену линеарну једначину n –тог реда (5.38), при чему претпостављамо да су функције $p_1, p_2, \dots, p_n$ и функција r непрекидне на интервалу I, што на основу Теореме 5.5 значи да сваки Кошијев задатак (5.38)-(5.39) има јединствено рјешење које је такође дефинисано на I.

Доказаћемо да се сва рјешења једначине (5.38) могу добити помоћу фундаменталног система рјешења одговарајуће хомогене једначине (5.40) и било ког рјешења нехомогене једначине.

Теорема 5.9. *Нека је $y_p(x)$, $x \in I$ произвољно рјешење нехомогене једначине (5.38) и $y_h(x)$ опште рјешење одговарајуће хомогене једначине (5.40) на интервалу I. Тада је опште рјешење нехомогене једначине (5.38) на интервалу I функција*

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x). \tag{5.45}$$

Доказ: На основу Леме 5.4 збир рјешења хомогене и рјешења нехомогене једначине је рјешење нехомогене једначине, па је функција (5.45) рјешење једначине (5.38). Покажимо сада да су сва рјешења нехомогене једначине (5.38) облика (5.45). Нека је $y(x)$, $x \in I$ произвољно рјешење нехомогене једначине и покажимо да се оно може записати у облику (5.45). У Леми 5.4 смо показали да је разлика два рјешења нехомогене једначине рјешење хомогене једначине, па је $y(x) - y_p(x)$ рјешење хомогене једначине (5.40). Ово рјешење је садржано у општем рјешењу $y_h(x)$ хомогене једначине, па је једнако неком рјешењу $\tilde{y}_h(x)$ из фамилије рјешења $y_h(x)$. Дакле, имамо

$$y(x) - y_p(x) = \tilde{y}_h(x) \Rightarrow y(x) = y_p(x) + \tilde{y}_h(x). \square$$

Из Теореме 5.9 добијамо да се опште рјешење нехомогене једначине (5.38) на I може записати у облику

$$y(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

гдје функције $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ чине фундаментални систем рјешења припадајуће хомогене једначине (5.40) и $y_p(x)$ је било које рјешење нехомогене једначине (5.38), $C_1, C_2, \dots, C_n$ су произвољне реалне константе.

Пошто смо видјели на који начин одређујемо фундаментални систем рјешења за неке специјалне случајеве хомогених линеарних једначина, преостаје нам да размотримо методе за одређивање општег рјешења нехомогене једначине (5.38). Можемо користити два метода: метод неодређених коефицијената који се примјењује само за нехомогену линеарну једначину са константним коефицијентима или метод Лагранжа који се назива и метод варијације параметара и који представља универзални метод.

❖ Метод неодређених коефицијената

Овај метод користимо искључиво за рјешавање нехомогених линеарних једначина са константним коефицијентима

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = r(x) \tag{5.46}$$

гдје су гдје су $a_1, a_2, \dots, a_n$ реалне константе и r функција непрекидна на интервалу I. У наставку разматрамо случајеве у којима је, у зависности од облика функције $r(x)$, познат облик партикуларног рјешење једначине (5.46).

- Нека је

$$r(x) = P_m(x)$$

гдје је $P_m(x)$ полином степена m. Тада партикуларно рјешење тражимо у облику

$$y_p(x) = x^k Q_m(x)$$

гдје је k вишеструкост нуле као коријена карактеристичне једначине и $Q_m(x)$ непознат полином степена m чије коефицијенте одређујемо из услова да је $y_p(x)$ рјешење једначине (5.46). Уколико нула није коријен карактеристичне једначине тада је $k = 0$.

Примјер 5.45. Наћи опште рјешење једначина

а) $y'' + y = x^2 + x$, б) $x^2 y'' - 2y = 6\ln x$.

Рјешење: а) Карактеристична једначина хомогене једначине је $\lambda^2 + 1 = 0$ чији су коријени $\lambda = \pm i$, па је опште рјешење хомогене једначине је $y_h(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$. Из облика функције

$$r(x) = x^2 + x = P_2(x)$$

добијамо да је партикуларно рјешење облика

$$y_p(x) = x^k Q_2(x).$$

Пошто нула није коријен карактеристичне једначине тада је $k = 0$, па имамо

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Уврштавањем у једначину добијамо $A = 1, B = 1, C = -2$, тј. $y_p(x) = x^2 + x - 2$. Опште рјешење једначине је

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = C_1 cosx + C_2 sinx + x^2 + x - 2.$$

б) Дата једначина је нехомогена Ојлер-Кошијева једначина. Смјеном $x = e^t$, $z(t) = y(e^t)$ добијамо да се дата једначина трансформише у нехомогену једначину

$$z'' - z' - 2z = 6t.$$

Опште рјешење припадајуће хомогене једначине је $z(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t}$, док партикуларно рјешење тражимо у облику

$$z_p(t) = t^kQ_1(t) = At + B.$$

Добијамо $z_p(t) = -3t - \frac{3}{2}$, па је опште рјешење једначине

$$z(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} - 3t + \frac{3}{2}.$$

Враћајући смјену $t = \ln x$, добијамо опште рјешење почетне једначине

$$y(x) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x} - 3\ln x + \frac{3}{2}. \ \lozenge$$

❖ Нека је

$$r(x) = e^{\alpha x}P_m(x)$$

гдје је $P_m(x)$ полином степена m и α произвољан реалан број. Тада партикуларно рјешење тражимо у облику

$$y_p(x) = x^ke^{\alpha x}Q_m(x)$$

гдје је $Q_m(x)$ непознат полином степена m који одређујемо из услова да је $y_p(x)$ рјешење једначине (5.46) и k вишеструкост реалног броја α као коријена карактеристичне једначине. Уколико α није коријен карактеристичне једначине тада је $k = 0$.

Примјер 5.46. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y' - 2y = 3e^x.$$

Рјешење: Коријени карактеристичне једначине $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ су $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$ па је $y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Даље је $r(x) = 3e^x = P_0(x)e^x$ и

$$y_p(x) = x^k e^x Q_0(x).$$

Пошто је $\lambda_1 = 1$ прост коријен карактеристичне једначине имамо $k = 1$ па је $y_p(x) = Axe^x$. Увршттавањем у једначину добијамо $A = 1$, па је

$$y_p(x) = xe^x$$

партикуларно рјешење једначине. Опште рјешење једначине је

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + xe^x. \quad \lozenge$$

- Нека је

$$r(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)cos\beta x + Q_n(x)sin\beta x)$$

гдје су $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ полиноми степена m и n и $\alpha + i\beta$ комплексан коријен карактеристичне једначине вишеструкости k. Тада је партикуларно рјешење облика

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}(R_s(x)cos\beta x + T_s(x)sin\beta x)$$

гдје су $R_s(x)$ и $T_s(x)$ непознати полиноми степена $s = max\{m, n\}$ које одређујемо из услова да је $y_p(x)$ рјешење једначине (5.46) и k вишеструкост комплексног броја $\alpha + i\beta$ као коријена карактеристичне једначине. Уколико $\alpha + i\beta$ није коријен карактеристичне једначине тада је $k = 0$.

Примјер 5.47. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y' - 6y = 52cos2x.$$

Рјешење: $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + sin2x - 5cos2x.$ ◊

Примјер 5.48. Наћи опште рјешење једначине

$$y''' + 3y'' = 2e^{-3x}$$

Рјешење: Карактеристична једначина хомогене једначине је $\lambda^3 + 3\lambda^2 = 0$ одакле добијамо $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -3$ па је $y_h(x) = C_1 + C_1x + C_3e^{-3x}$. Даље је

$$r(x) = 2e^{-3x} = P_0(x)e^{-3x}$$

па партикуларно рјешење одређујемо методом неодређених коефицијента. Имамо

$$y_p(x) = x^k e^{-3x} Q_0(x)$$

и пошто је $\lambda_1 = -3$ прост коријен карактеристичне једначине добијамо $k = 1$. Дакле

$$y_p(x) = Axe^{-3x}.$$

Уврштавањем у једначину добијамо $A = \frac{2}{9}$ па је партикуларно рјешење $y_p(x) = \frac{2}{9}xe^{-3x}$. Опште рјешење једначине је

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = C_1 + C_1x + C_3e^{-3x} + \frac{2}{9}xe^{-3x}.$$ ◊

Поред напријед посматраних облика функције $r(x)$, облик партикуларног рјешења је познат и у случају када је функција $r(x)$ збир коначно много функција које су неког од облика из претходно разматраних случајева.

Теорема 5.10. *Нека су* $y_{p_1}(x)$ и $y_{p_2}(x)$, $x \in I$ *партикуларна рјешења једначина*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = r_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = r_2(x).$$

респективно. Тада је

$$y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$$

на интервалу I партикуларно рјешење једначине

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = r_1(x) + r_2(x).$$

Примједба 5.5. Тврђење из претходне теореме вриједи и у случају када је функција $r(x)$ збир k функција $r_1(x) + r_2(x) + \cdots + r_k(x)$.

Примјер 5.49. Наћи опште рјешење једначине $y'' + 3y' + 2y = x + 2e^x$.

Рјешење: Карактеристична једначина придружене хомогене једначине је $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ па је $y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. Прво одређујемо партикуларно рјешење $y_{p_1}(x)$ једначине

$$y'' + 3y' + 2y = x$$

у облику $y_{p_1}(x) = Ax + B$ и добијамо $y_{p_1}(x) = x/2 - 3/4$. Затим одређујемо партикуларно рјешење $y_{p_2}(x)$ једначине

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^x$$

у облику $y_{p_2}(x) = Ae^x$ и добијамо $y_{p_2}(x) = e^x/3$. На основу Теореме 5.10 добијамо опште рјешење

$$y(x) = y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{3}e^x.$$

❖ Метод варијације параметара

Метод варијације параметра смо већ користили код рјешавања линеарне једначине првог реда. У наставку овај метод примјењујемо на рјешавање линеарних једначина вишег реда. Посматрамо линеарну једначину другог реда, при чему се исти приступ користи и у општем случају, тј. за линеарну једначину n-тог реда.

Нека је

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x) \tag{*}$$

нехомогена линеарна диференцијална једначина другог реда гдје су функције p_1, p_2 и r непрекидне на интервалу I. Нека је

$$y_h(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

опште рјешење припадајуће хомогене једначине на I, гдје функције y_1 и y_2 чине фундаментални систем рјешења једначине и C_1, C_2 су произвољне реалне константе. Рјешење једначине (*) тражимо у облику

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{**}$$

гдје су $C_1(x), C_2(x)$ непрекидно диференцијабилне функције које треба одредити из услова да функција (**) буде рјешење једначине (*). Диференцирањем у (**) добијамо

$$y'(x) = C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 + C_1(x)y_1{}' + C_2(x)y_2{}'.$$

Функција (**) садржи двије непознате функције за које постављамо само један услов: да (**) буде рјешење почетне једначине. Зато постављамо и један додатни услов

$$C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 = 0.$$

Тада је

$$y'(x) = C_1(x)y_1{}' + C_2(x)y_2{}'$$

па је

$$y''(x) = C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' + C_1(x)y_1{}'' + C_2(x)y_2{}''.$$

Уврштавањем у (*) добијамо

$$C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' + C_1(x)y_1{}'' + C_2(x)y_2{}'' +$$
$$p_1(x)(C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2) + p_2(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = r(x).$$

Пошто је $y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ рјешење хомогене једначине имамо

$$C_1(x)y_1{}'' + C_2(x)y_2{}'' + p_1(x)(C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2) + p_2(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = 0$$

па добијамо

$$C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' = r(x).$$

Дакле, добијамо систем

$$\begin{aligned} C_1{}'(x)y_1 + C_2{}'(x)y_2 &= 0 \\ C_1{}'(x)y_1{}' + C_2{}'(x)y_2{}' &= r(x) \end{aligned} \qquad (***)$$

из којег одређујемо функције $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Посматрајмо сада једначину (5.38)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = r(x)$$

гдје су функције p_i, $i = 1,2,\ldots n$ и r непрекидне на интервалу I.

Нека је опште рјешење придружене хомогене једначине на I дато са

$$y_h(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

гдје $y_1, \dots, y_n$ чине фундаментални систем рјешења припадајуће хомогене једначине и $C_1, \dots, C_n$ су произвољне реалне константе. Рјешење једначине (5.38) одређујемо у облику

$$y(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n$$

и на сличан начин као у случају линеарне диференцијалне једначине другог реда добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} &C_1{}'(x) y_1 + C_2{}'(x) y_2 + \cdots C_n{}'(x) y_n = 0 \\ &C_1{}'(x) y_1{}' + C_2{}'(x) y_2{}' + \cdots C_n{}'(x) y_n{}' = 0 \\ &\dots \\ &C_1{}'(x) y_1{}^{(n-1)} + C_2{}'(x) y_2{}^{(n-1)} + \cdots C_n{}'(x) y_n{}^{(n-1)} = r(x) \end{aligned} \tag{5.49}$$

из којег одређујемо функције $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$.

Примјер 5.50. Наћи опште рјешење једначине

$$y'' + y = \frac{1}{cosx}.$$

Рјешење: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ па је $y_1 = cosx$, $y_2 = sinx$ и $y_h(x) = C_1 cosx + C_2 sinx$. Пошто је

$$r(x) = \frac{1}{cosx}$$

опште рјешење нехомогене једначине одређујемо методом варијације параметара.

Из (***) добијамо систем

$$C_1{}'(x)cosx \ + C_2{}'(x)sinx = 0$$

$$-C_1{}'(x)sinx \ + C_2{}'(x)cosx = \frac{1}{cosx}.$$

Рјешавањем овог система добијамо $C_1{}'(x) = -tgx,\ \ C_2{}'(x) = 1$ па је

$$C_1(x) = \ln|cosx| + D_1, \quad C_2 = x + D_2.$$

Опште рјешење једначине је

$$y(x) = D_1cosx \ + D_2sinx + cosxln|cosx| + xsinx.\lozenge$$

Примјер 5.51. Наћи опште рјешење једначине

$$y''' + y' = \frac{1}{sin^2x}.$$

Рјешење: Карактеристична једначина хомогене једначине је $\lambda^3 + \lambda = 0$ одакле добијамо

$$y_h(x) = C_1 + C_2cosx + C_3sinx.$$

Пошто је

$$r(x) = \frac{1}{sin^2x}$$

опште рјешење одређујемо методом варијације параметара. Из (5.49) за $n = 3$ добијамо систем

$$C_1{}'(x) + C_2{}'(x)cosx \ + C_3{}'(x)sinx = 0$$

$$-C_2{}'(x)sinx \ + C_3{}'(x)cosx = 0$$

$$-C_2'(x)cosx - C_3{}'(x)sinx = \frac{1}{sin^2x}.$$

За детерминанту система имамо

$$\begin{vmatrix} 1 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ 0 & -cosx & -sinx \end{vmatrix} = 1$$

па је

$$C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & cosx & sinx \\ 0 & -sinx & cosx \\ \dfrac{1}{sin^2x} & -cosx & -sinx \end{vmatrix} = \frac{1}{sin^2x} \Rightarrow C_1(x) = -ctgx + D_1,$$

$$C_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & sinx \\ 0 & 0 & cosx \\ 0 & \dfrac{1}{sin^2x} & -sinx \end{vmatrix} = -\frac{cosx}{sin^2x} \Rightarrow C_2(x) = \frac{1}{sinx} + D_2,$$

$$C_3'(x) = \begin{vmatrix} 1 & cosx & 0 \\ 0 & -sinx & 0 \\ 0 & -cosx & \dfrac{1}{sin^2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{sinx} \Rightarrow C_3(x) = \ln\left|ctg\frac{x}{2}\right| + D_3.$$

Партикуларно рјешење једначине је

$$y_p(x) = -ctgx + ctgx + sinx\ln\left|ctg\frac{x}{2}\right| = sinx\ln\left|ctg\frac{x}{2}\right|$$

и опште рјешење једначине

$$y(x) = D_1 + D_2cosx + D_3sinx + sinx\ln\left|ctg\frac{x}{2}\right|. \ \lozenge$$

.