УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2022/2023

ТЕМА 4: ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

4.1. Двојни интеграл

4.2. Тројни интеграл

ЛИТЕРАТУРА: **Биљана Војводић, Владимир Владичић: Математика II, Машински факултет, Бања Лука, 2022**

НАСТАВНИК: **проф. др Биљана Војводић**

ТЕМА 4: ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

4.1. ДВОЈНИ ИНТЕГРАЛ

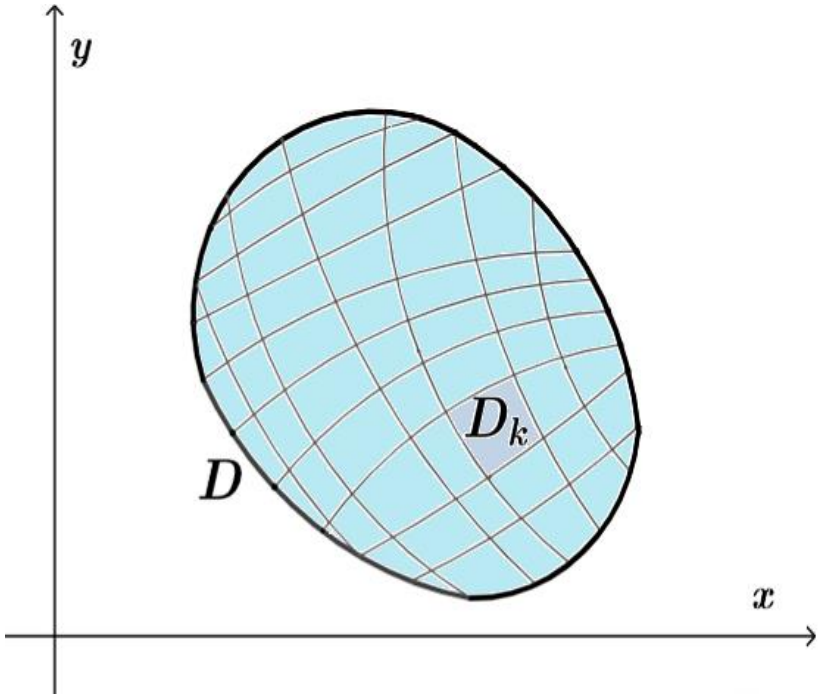
Посматрамо функцију двије промјенљиве $f(x,y)$ која је дефинисана на затвореном и ограниченом скупу (области или подручју дефинисаности) D из xy −равни. Између одређеног и двојног интеграла постоје аналогије у погледу дефиниције, особина, примјене и неких метода рјешавања. Аналогија у геометријској интерпретацији се огледа у томе што одређени интеграл ненегативне функције представља површину криволинијског трапеза, док двојни интеграл ненегативне функције представља запремину криволинијског цилиндра.

4.1.1. Дефиниција двојног интеграла

Нека је функција $f(x,y)$ дефинисана на затвореном и ограниченом скупу $D \subset \mathbb{R}^2$ који има површину $P(D)$.[1] Нека је P подјела скупа D на дијелове (подобласти) $D_i, i = 1,2,\dots,n$ који имају површину, Слика 4.1, тако да двије подобласти D_i и $D_j, i \neq j$ имају заједничке евентуално само граничне тачке и да је

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_k = D \quad \wedge \quad P(D) = \sum_{k=1}^{n} P(D_k).$$

[1] За појам фигуре у равни која има површину видјети Поглавље 2.5. Примјене одређеног интеграла



Слика 4.1

За подјелу P дефинишемо **параметар подјеле**

$$\lambda(P) = \max_{k=1,\dots,n} d(D_k)$$

гдје је

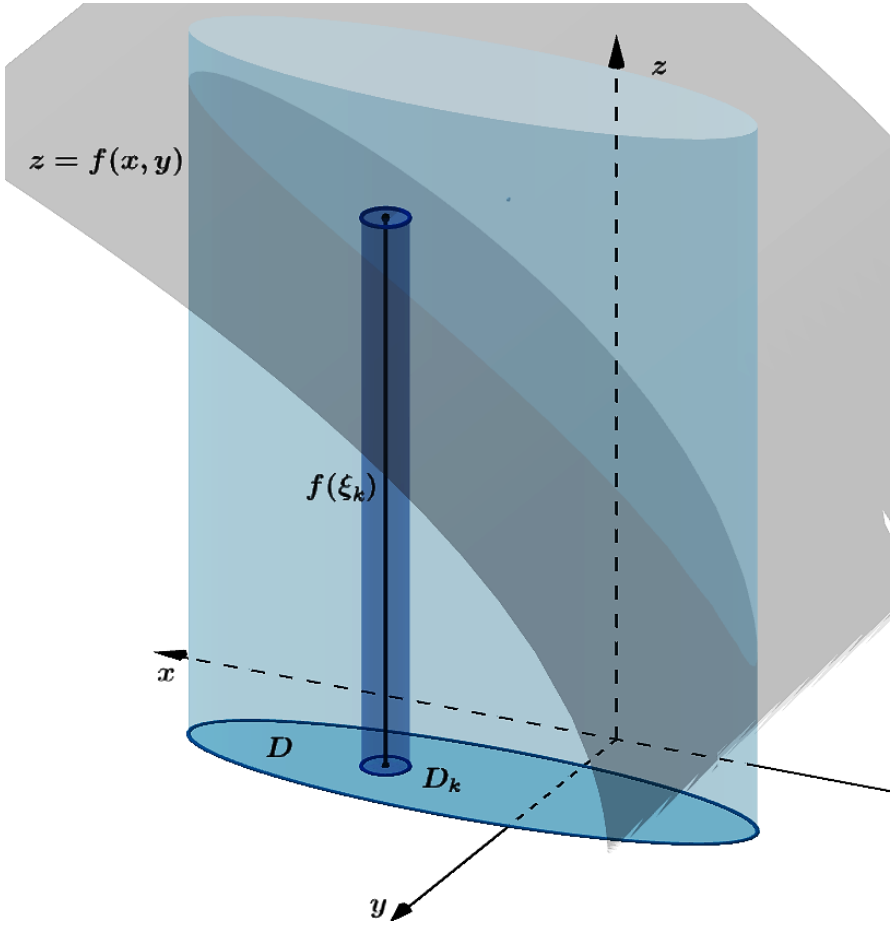
$$d(D_k) = \sup_{M,N\in D_k} d(M,N).$$

Изаберимо у свакој подобласти D_k произвољну тачку $\xi_k = (x_k, y_k),\ k = 1, \dots, n.$ Скуп тачака $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ називамо **скуп истакнутих тачака** који одговара подјели P.

На овај начин се добија **подјела скупа са истакнутим тачкама** коју означавамо са (P, ξ).

У односу на подјелу са истакнутим тачкама (P, ξ) формирамо **интегралну суму** функције f:

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) P(D_k).$$



Слика 4.2

Ако је функција f ненегативна, сабирци $f(\xi_k)P(D_k)$ у интегралној суми представљају запремину[2] тијела које је ограничено цилиндричном површи са основом D_k и висином $f(\xi_k)$, $k = 1, \dots, n$, Слика 4.2.

Тада интегрална сума, као збир свих ових запремина, у одређеном смислу апроксимира запремину криволинијског цилиндра, односно тијела које је ограничено: „одоздо“ са скупом D, „са стране“ цилиндричном површи чије су изводнице паралелне z −оси и пролазе тачкама на граници скупа D и „одозго“ дијелом површи $z = f(x, y)$ који се ортогонално пројектује на D.

У наставку ћемо подразумијевати да је скуп дефинисаности $D \subset \mathbb{R}^2$ затворен и ограничен скуп.

[2] Појам запремине се дефинише тако да се за почетак дефинише запремина полиедра а затим се запремина тијела (просторне фигуре) дефинише помоћу супремума $\underline{V}$ запремина полиедара који су уписани, односно инфимума $\overline{V}$ запремина полиедара који су описани око тог тијела. Каже се да тијело има запремину ако је $\underline{V} = \overline{V}$. Показује се да тијело има запремину ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје описани и уписани полиедри такви да је разлика њихових запремина мања од ε.

ДЕФИНИЦИЈА ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

Дефиниција 4.1. *Нека је функција* $f(x,y)$ *дефинисана на скупу* $D \subset \mathbb{R}^2$. *Ако постоји реалан број* I *такав да за произвољно* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *тако да за сваку подјелу са скупом истакнутих тачака* (P,ξ) *скупа* D *која испуњава услов* $\lambda(P) < \delta$ *вриједи неједнакост*

$$|\sigma(f,P,\xi) - I| < \varepsilon,$$

тада кажемо да је функција f ***интеграбилна*** *на* D *и број* I *називамо* ***двојни интеграл*** *функције* $f(x,y)$ *на* D, *при чему користимо ознаку*

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Примједба 4.1. Двојни интеграл се, као и одређени, понекад дефинише помоћу једнакости

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f,P,\xi)$$

при чему се овдје не ради о класичној граничној вриједности. [3]

Као и код функција једне промјенљиве, показује се да је **ограниченост функције двије промјенљиве потребан услов да би та функција била интеграбилна** на D.

Теорема 4.1. *Ако је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на* D, *тада је она на том скупу и ограничена.*

[3] Видјети Примједбу 2.2 у Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*

Сада разматрамо довољне услове за интеграбилност функције двије промјенљиве. Видјели смо код функције једне промјенљиве да је непрекидност довољан услов за интеграбилност функције на $[a,b]$, те да је и функција која има коначно много тачака прекида прве врсте на $[a,b]$ такође интеграбилна на $[a,b]$. Аналогне резултате имамо и у случају двојног интеграла.

Теорема 4.3. *Непрекидна функција $f(x,y)$ на затвореном и ограниченом скупу D је интеграбилна на том скупу.*

Услов непрекидности функције $f(x,y)$ на D јесте довољан, али не и потребан да би та функција била интеграбилна, и може да буде нарушен на неком скупу тачака из D који испуњава одређене услове. Да бисмо формулисали те услове уводимо појам скупа површине нула.

Кажемо да **скуп има површину нула** ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји фамилија квадрата таква да унија квадрата из ове фамилије садржи тај скуп и да површина ове уније није већа од ε. Може се показати да површину нула имају сљедећи скупови: коначан скуп тачака у равни, дуж, кружница, график реалне функције дефинисане и непрекидне на $[a,b]$, подскуп скупа површине нула, као и унија коначног броја ограничених скупова површине нула.

Теорема 4.4. *Нека је функција $f(x,y)$ дефинисана и ограничена на D. Ако скуп тачака прекида функције f на D има површину нула, тада је функција f интеграбилна на том скупу.*

4.1.2. Особине двојног интеграла

Двојни интеграл посједује већи број особина које су у потпуности аналогне особинама одређеног интеграла. Најважније од њих су свакако особине које описују однос двојног интеграла и алгебарских операција, као и однос двојног интеграла и релације поређења.

1) Нека је $P(D)$ површина скупа D. Тада је

$$\iint_D dxdy = P(D).$$

2) Ако је $D^* \subset D$ скуп који има површину и ако је функција f интеграбилна на D, тада је функција f интеграбилна и на скупу D^*.

3) Ако је функција f интеграбилна на скупу D који је унија скупова D_1 и D_2 који имају површину и чији је пресјек скуп површине нула, тада је функција f интеграбилна и на скуповима D_1 и D_2 и вриједи

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4) Ако су функције f и g интеграбилне на D, тада је функција $\alpha f + \beta g,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такође интеграбилна на D и вриједи

$$\iint_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy.$$

5) Ако су функције f и g интеграбилне на D и ако је $f(x,y) \leq g(x,y),\ (x,y) \in D$, тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

6) Ако је функција f интеграбилна на D, тада је и функција $|f|$ интеграбилна на D и вриједи

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

7) Ако је функција $f(x,y)$ ненегативна и интеграбилна на D и ако је $D^* \subset D$ скуп који има површину, тада је

$$\iint_{D^*} f(x,y)dxdy \leq \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Примјер 4.2. Доказати неједнакост

$$\frac{\pi^2}{3} \leq \iint_D \frac{dxdy}{cos^2x + sin^2y + 1} \leq \pi^2$$

гдје је $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq \pi,\ \ 0 \leq y \leq \pi\}$.

Рјешење: Функција

$$f(x,y) = \frac{1}{cos^2x + sin^2y + 1}$$

је непрекидна на D па је на основу Теореме 4.3 и интеграбилна на D.

Пошто је

$$1 \leq cos^2 x + sin^2 y + 1 \leq 3$$

добијамо

$$1/3 \leq f(x,y) \leq 1$$

и коришћењем монотоности двојног интеграла (особина 5)) добијамо неједнакост

$$\frac{1}{3}\iint_D dxdy \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D dxdy.$$

Из особине 1) двојног интеграла је $\iint_D dxdy = P(D) = \pi^2$ па увршатавањем у посљедњу неједнакост добијамо тражену неједнакост. ◊

Доказаћемо сада резултат о средњој вриједности интегралног рачуна за двојни интеграл.

Теорема 4.5. (Теорема о средњој вриједности) *Нека су функције* f и g *интеграбилне на затвореном и ограниченом скупу* D, *при чему је* $g(x,y) \geq 0 \quad (g(x,y) \leq 0)$ за $(x,y) \in D$, *и нека је* $m = \inf_{(x,y)\in D} f(x,y), \quad M = \sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$. *Тада постоји* $\mu \in [m,M]$ *такав да је*

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = \mu \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (4.1)$$

Ако је функција f *непрекидна на* D, *тада постоји тачка* $(c,d) \in D$ *таква да је*

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy = f(c,d) \iint_D g(x,y)dxdy. \qquad (4.2)$$

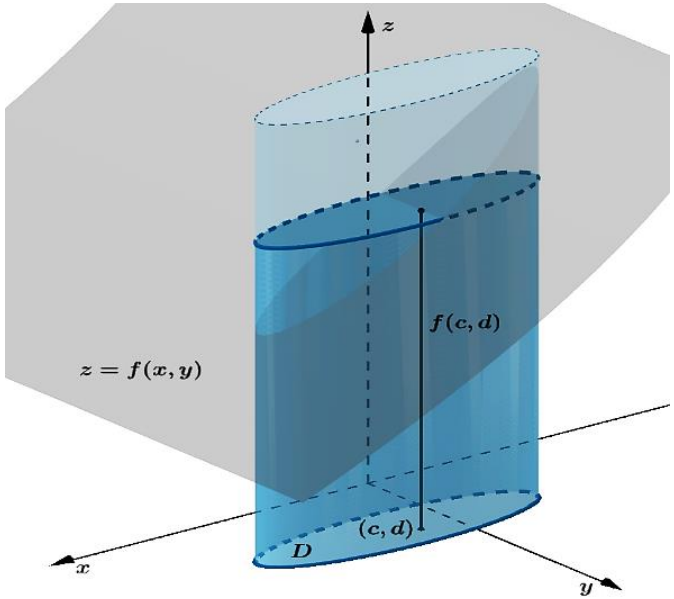
Стављајући у Теореми 4.5 да је $g(x,y)=1$ за $(x,y)\in D$, добија се сљедећа посљедица.

Посљедица 4.1. *Нека је функција f интеграбилна на D и нека је $m=\inf\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M=\sup\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$. Тада постоји $\mu\in[m,M]$ такав да је*

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\mu P(D).$$

Ако је функција f непрекидна на D, тада постоји тачка $(c,d)\in D$ таква да је

$$\iint_D f(x,y)dxdy=f(c,d)P(D). \qquad (4.3)$$



Слика 4.3

Ако је функција f ненегативна, онда једнакост (4.3) има геометријску интерпретацију аналогну геометријском тумачењу теореме о средњој вриједности за одређени интеграл.

Из једнакости (4.3) слиједи да постоји тачка (c,d) из D таква да је запремина цилиндричне површи са основом D и висином $f(c,d)$ једнака запремини криволинијског цилиндра ограниченог са скупом D, цилиндром чије су изводнице паралелне $z-$оси и пролазе граничним тачкама скупа D и дијелом површи $z=f(x,y)$ који се ортогонално пројектује на D, Слика 4.3.

4.1.3. Одређивање двојног интеграла

Одређивање двојног интеграла се своди на израчунавање одређених интеграла код којих су интервали интеграције генерисани скупом (подручјем) интеграције двојног интеграла. Посматрамо најједноставнији случај, тј. када је подручје интеграције правоугаоник.

Теорема 4.6. *Нека је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на правоугаонику* $R = [a,b] \times [c,d]$. *Ако за свако* $x \in [a,b]$ *постоји одређени интеграл*

$$I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$

тада постоји и интеграл

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

и при томе је

$$I = \iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Формула за одређивање двојног интеграла из Теореме 4.6 се обично записује у облику

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Ако у Теореми 4.6 промјењиве x и y замијене улоге, добијамо сљедећу формулу коју такође користимо за одређивање двојног интеграла по правоугаонику R.

Теорема 4.7. *Нека је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на правоугаонику* $R=[a,b]\times[c,d]$. *Ако за свако* $y\in[c,d]$ *постоји одређени интеграл*

$$J(y)=\int_a^b f(x,y)dx,$$

тада постоји и интеграл

$$\int_c^d J(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

и вриједи

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx\,.$$

Примјер 4.4. Израчунати интеграл

$$\iint_R x^2ydxdy$$

гдје је R правоугаоник $2\le x\le 4,\quad 1\le y\le 4.$

Рјешење: Испуњене су претпоставке за примјену Теореме 4.6 јер је функција $f(x,y)=x^2y$ интеграбилна на R и за свако $x\in[2,4]$ постоји интеграл

$$\int_1^4 x^2ydy.$$

То значи да постоји и двојни интеграл функције f на R и вриједи

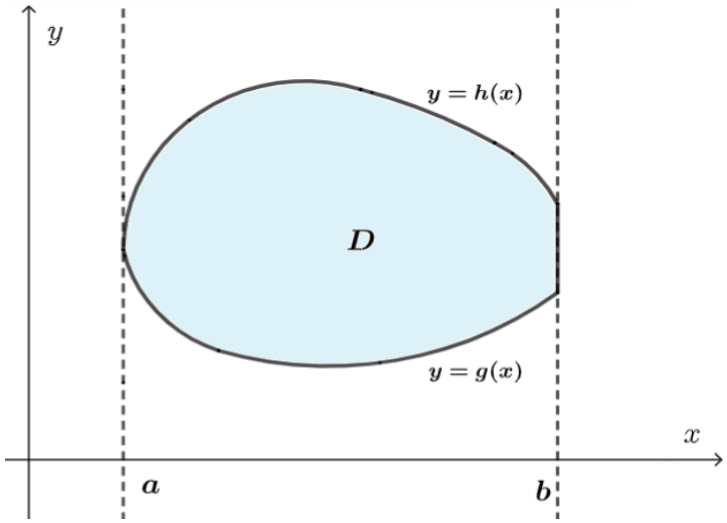
$$\iint_R x^2 y dx dy = \int_2^4 x^2 dx \int_1^4 y dy = \int_2^4 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^4 dx = \frac{15}{2}\int_2^4 x^2\, dx = \frac{15}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^4 = 140.$$

Такође, пошто за свако $y \in [1,4]$ постоји интеграл

$$\int_2^4 x^2 y dx$$

задатак смо могли урадити и примјеном Теореме 4.7. У том случају је

$$\iint_R x^2 y dx dy = \int_1^4 dy \int_2^4 x^2 y dx\, dy = \int_1^4 y\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^4 dx = \frac{56}{3}\int_1^4 y\, dy = \frac{56}{3}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 140. \quad \Diamond$$



Слика 4.5

Двојне интеграле можемо израчунати и у случају када је подручје интеграције сложеније од правоугаоника. Када је

$$D = \{(x,y): a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\} \qquad (4.4)$$

гдје су g и h непрекидне функције на сегменту $[a,b]$ (Слика 4.5), тада се двојни интеграл одређује помоћу сљедеће теореме.

Теорема 4.8. *Нека је функција* $f(x,y)$ *интеграбилна на скупу* D *облика (4.4). Ако за свако* $x \in [a,b]$ *постоји интеграл*

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

тада постоји и интеграл

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

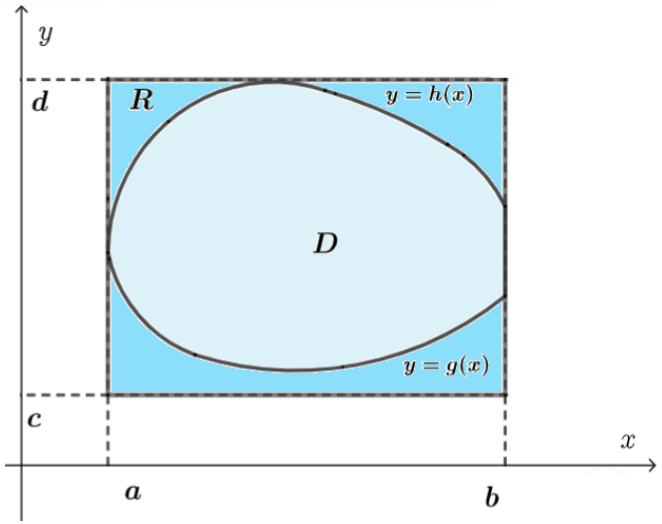
и при томе је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy. \qquad (4.5)$$

Доказ: Посматрајмо произвољан правоугаоник $R = [a,b] \times [c,d]$ описан око скупа D чије су стране паралелне координатним осама, Слика 4.6. Овакав правоугаоник постоји пошто је скуп D ограничен. Дефинишимо на правоугаонику R функцију

$$\check{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R \setminus D \end{cases}.$$

Користећи особину 3) двојног интеграла и Теореми 4.6 добијамо



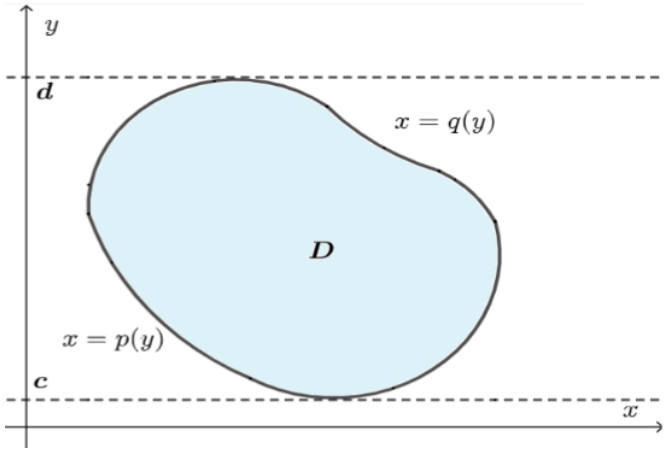
Слика 4.6

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R \check{f}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \check{f}(x,y)dy \right) dx.$$

Даље имамо

$$\int_c^d \check{f}(x,y)dy = \int_c^{g(x)} \check{f}(x,y)dy + \int_{g(x)}^{h(x)} \check{f}(x,y)dy + \int_{h(x)}^d \check{f}(x,y)dy = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

одакле добијамо формулу (4.5). Теорема је доказана. □



Слика 4.7

Сличан резултат имамо и када се подручје интеграције D може представити у облику

$$D = \{(x,y): c \le y \le d,\ \ p(y) \le x \le q(y)\}. \qquad (4.6)$$

Тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx. \qquad (4.7)$$

Уколико се D не може представити на један од начина (4.4) или (4.6), тада је потребно подијелити скуп D на коначно много подобласти облика (4.4) или (4.6). У том случају интеграл по D се на основу особине 3) двојног интеграла добија као збир интеграла по подобластима добијеним таквом подјелом скупа D.

Примјер 4.5. Измијенити поредак интеграције у интегралу

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} f(x,y)dy$$

гдје је $f(x,y)$ интеграбилна функција на подручју интеграције.

Рјешење: Подручје интеграције је

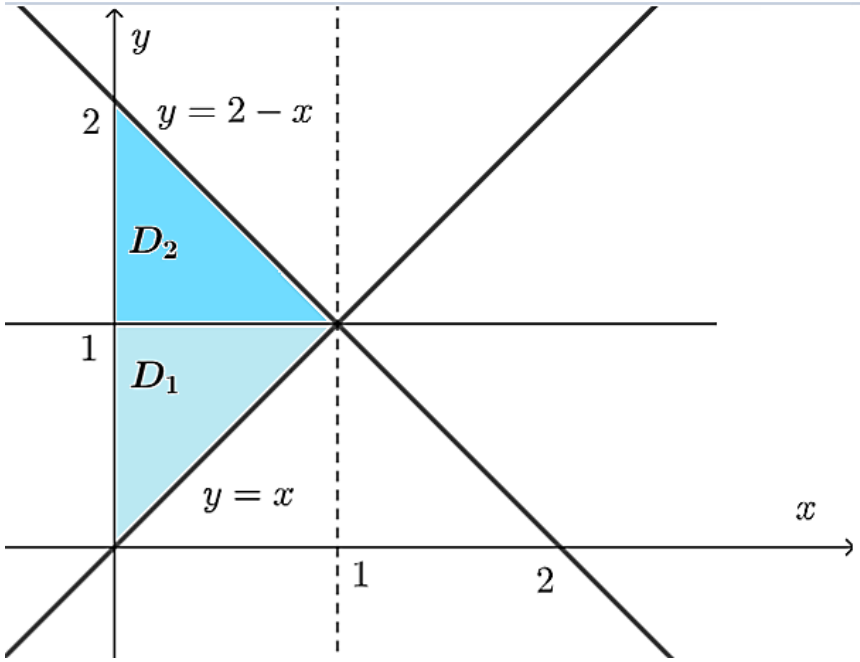
$$D = \{(x,y)\colon 0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2-x\}.$$

Да бисмо промијенили поредак интеграције, D треба представити у облику (4.6). Уочавамо да је у том случају D унија двије подобласти D_1 и D_2 које немају заједничких унутрашњих тачака (Слика 4.8), па је из особине 3) двојног интеграла

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Даље из једначина правих $y = x$ и $y = 2-x$ изражавамо x као функцију од y:

$$x = y, \qquad \text{односно} \quad x = 2-y.$$



Слика 4.8

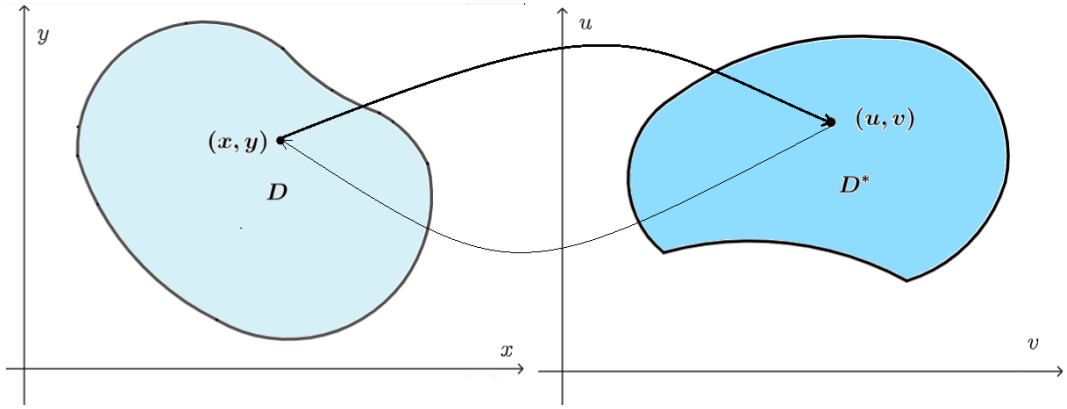
Сада примјеном формуле (4.7) добијамо

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

4.1.4. Смјена промјењљивих у двојном интегралу

Подјела скупа D на скупове облика (4.4) или (4.6) у општем случају може да буде компликована. Зато се за одређивање двојних интеграла користи смјена промјењљивих (увођење нових промјењљивих) којима се поједностављује подинтегрална функција и/или подручје интеграције.

Аналогон формуле за смјену промјењљиве у одређеном интегралу у $\mathbb{R}^2$ трансформише двојни интеграл функције f на скупу D у xy −равни у двојни интеграл нове функције $F(u,v)$ на скупу D^* из uv −равни. Смјеном промјењљивих у двојном интегралу такође се мијењају и подинтегрална функција и подручје интеграције. Циљ увођења смјене промјењљивих код двојних интеграла је углавном прелазак на ново једноставније подручје интеграције.



Слика 4.11

Умјесто функције једне промјењљиве сада имамо двије функције које повезују координате x и y са новим координатама u и v.

Нека је дато пресликавање

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v) \tag{4.8}$$

и нека је D^* скуп у uv −равни који се овим пресликавањем слика у скуп D xy −равни, Слика 4.11. Претпостављамо да је пресликавање (4.8) **обострано једнозначно**, па је из (4.8) могуће изразити u и v помоћу x и y:

$$u = u(x,y),\ \ v = v(x,y).$$

Ово пресликавање је инверзно пресликавање пресликавању (4.8) и њиме се скуп D xy −равни пресликава у скуп D^* uv −равни.

Посматраћемо пресликавања код којих су функције $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ непрекидно диференцијабилне на D^*, тј. које имају непрекидне парцијалне изводе на D^*.

Функционална детерминанта

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \tag{4.9}$$

се назива **Јакобијева детерминанта** [4] или **јакобијан** пресликавања (4.8).

[4] Carl Gustav Jacobi (1804-1851), њемачки математичар

Без доказа наводимо формулу којом се успоставља веза између интеграла функције $f(x,y)$ на скупу D и интеграла функције $f\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ на скупу D^*.

Теорема 4.9. (Формула за смјену промјенљивих у двојном интегралу) *Нека је функција $f(x,y)$ непрекидна на скупу D и нека су испуњени сљедећи услови:*

1) пресликавање $x=x(u,v), y=y(u,v)$ скупа D^* у скуп D је обострано једнозначно,

2) функције $x(u,v)$ и $y=y(u,v)$ су непрекидно диференцијабилне на D^* и

3) $J(u,v)\neq 0$ на D^*.

Тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J(u,v)|dudv \tag{4.10}$$

Примједба 4.2. Формула (4.10) се може користити и ако је услов једнозначности пресликавања (4.8) нарушен на неком скупу из D^* који има површину нула или ако је јакобијан пресликавања једнак нули на неком скупу из D^* површине нула.

Уколико је познато инверзно пресликавање $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, онда се за рачунање јакобијана пресликавања може користити и формула

$$\frac{1}{J(u,v)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

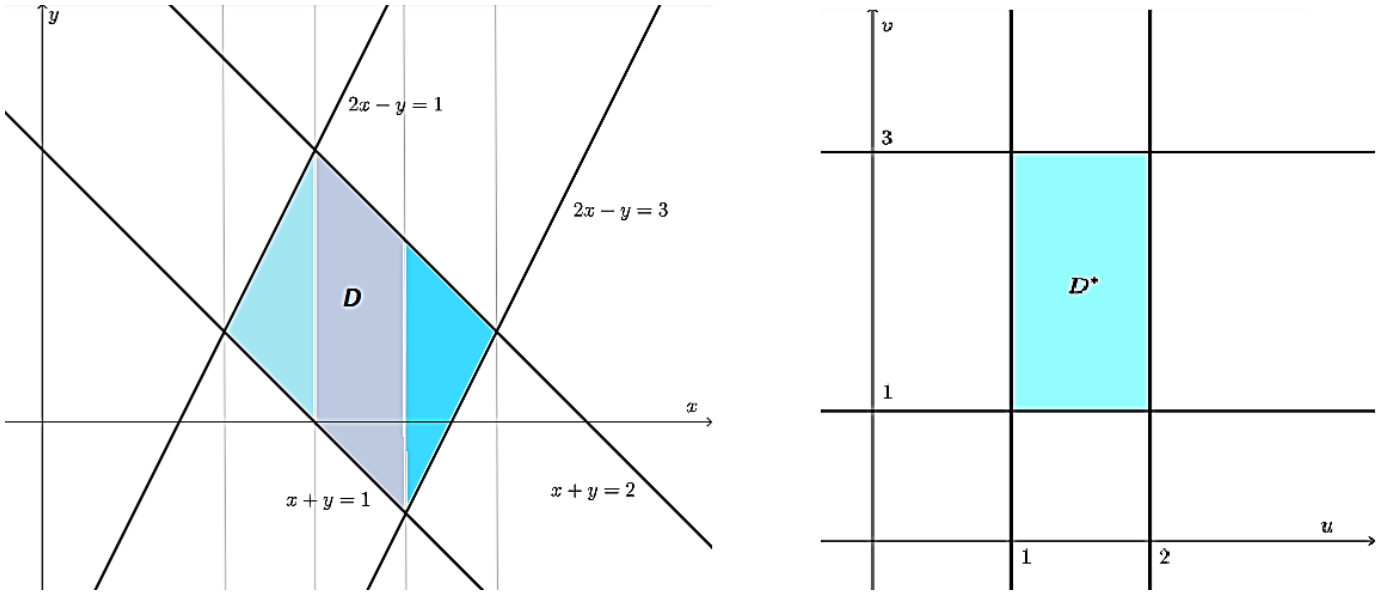
Примјер 4.8. Израчунати интеграл

$$I = \iint_D (2x - y)dxdy$$

гдје је скуп D ограничен линијама

$$x + y = 1, \qquad x + y = 2, \qquad 2x - y = 1, \qquad 2x - y = 3.$$

Рјешење: За директну примјену неке од формула (4.5) или (4.7), требало би одредити пресјечне тачке датих правих а затим интеграл рачунати као збир интеграла. На Слици 4.12 приказане су три подобласти скупа D које би требало посматрати за примјену формуле (4.5). Слична је ситуација уколико се промијени поредак интеграције и примијени формула (4.7).



Слика 4.12

Да поједноставимо подручје интеграције, уводимо смјену промјењљивих

$$x + y = u, \qquad 2x - y = v$$

којом се скуп D слика у правоугаоник

$$D^* = \{(u, v): 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 3\},$$

јер се праве

$$x + y = 1, \qquad x + y = 2$$

сликају у праве

$$u = 1, \qquad u = 2$$

респективно, а праве

$$2x - y = 1, \qquad 2x - y = 3$$

у праве

$$v = 1, \qquad v = 2$$

респективно, Слика 4.12.

Пошто је пресликавање облика $u = u(x, y), v = v(x, y)$, за одређивање јакобијана пресликавања користимо формулу (4.11):

$$\frac{1}{J(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow |J(u,v)| = \frac{1}{3}.$$

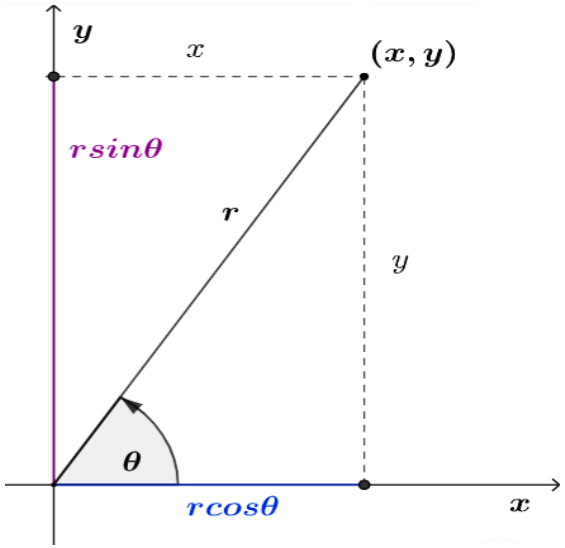
За подинтегралну функцију имамо

$$f\big(x(u,v), y(u,v)\big) = 2x - y = v.$$

Сада из формуле (4.10) добијамо

$$I = \iint_D (2x - y)dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D^*} v\,dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 vdv = \frac{4}{3}. \ \lozenge$$

4.1.5. Поларне координате



Слика 4.13

Ако подинтегрална функција или једначина(е) границе скупа интеграције садрже израз $x^2 + y^2$, тада се одређивање двојног интеграла често поједностављује увођењем нових промјенљивих r и θ, које називамо **поларне координате.**

У геометријском смислу, r представља удаљеност тачке чије су координате (x, y) од координатног почетка, а θ угао који радијус-вектор тачке гради са позитивним дијелом x −осе, Слика 4.13. Геометријски опис нових промјенљивих дефинише везу између правоуглих и поларних координата

Дакле, пресликавање којим се скуп $D^* = \{(r, \theta) | \, r \geq 0, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ $r\theta$ −равни пресликава у скуп $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ xy −равни је

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{4.12}$$

Провјеримо да ли су за пресликавање (4.12) испуњене претпоставке за смјену промјенљивих из Теореме 4.9.

Уочимо на почетку да су функције $x(r, \theta) = r\cos\theta$, $y(r, \theta) = r\sin\theta$ непрекидно диференцијабилне на $\mathbb{R}^2$. Пресликавање (4.12) је обострано једнозначно ако је $r > 0$ и ако θ ограничимо на интервал $0 \leq \theta < 2\pi$.

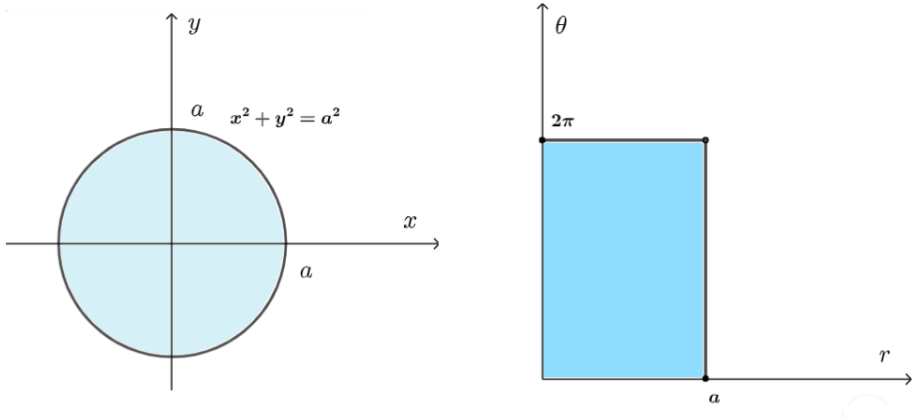
Даље, за јакобијан пресликавања имамо

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{vmatrix}=r$$

па је $J(r,\theta)\neq 0$ ако је $r>0$.

Према томе, услови из Теореме 4.9 су нарушени на скупу тачака за које је $r=0$ или $\theta=2\pi$. Како овај скуп тачка има површину нула, на основу Примједбе 4.2 закључујемо да можемо примијенити формулу (4.10). Дакле, формула за смјену промјењљивих у поларним координатама је

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D^*} f(rcos\theta,rsin\theta)rdrd\theta. \qquad (4.13)$$



а) б)

Слика 4.14

Јасно је да се пресликавањем (4.12) круг

$$D=\{(x,y)\colon x^2+y^2\leq a^2\}$$

пресликава на правоугаоник

$$D^*=\{(r,\theta)\colon 0\leq\theta\leq 2\pi\wedge 0\leq r\leq a\}$$

Слика 4.14 а) и б), и због тога се ова смјена често користи када се у границама скупа интеграције појављује израз x^2+y^2.

Примјер 4.9. Израчунати интеграл

$$\iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy$$

гдје је D: $e^2 \le x^2+y^2 \le e^4$.

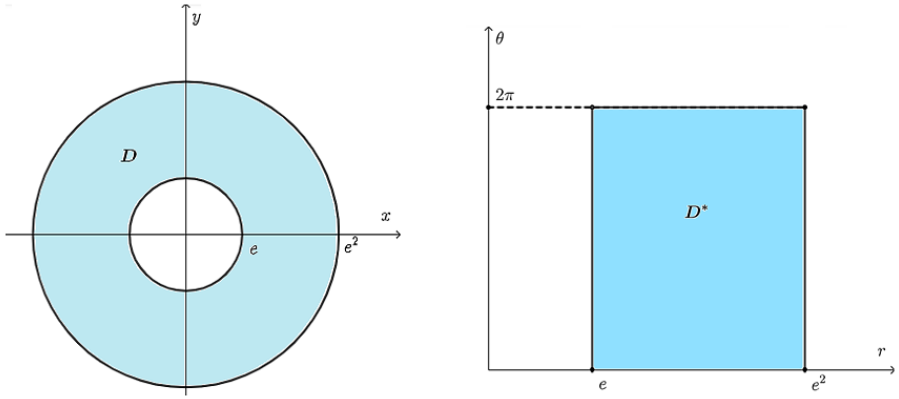
Рјешење: Подручје интеграције је кружни прстен, Слика 4.15.

Уводимо поларне координате:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \qquad J(r,\theta) = r.$$

Тада се кружни прстен D слика на правоугаоник

$$D^* = \{(r,\theta): 0 \le \theta \le 2\pi \ \wedge \ e \le r \le e^2\}.$$



Слика 4.15

Добијамо

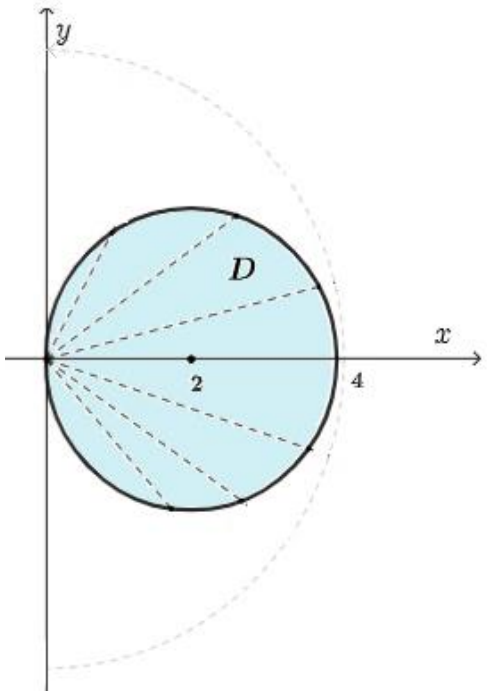
$$I = \iint_D \ln(x^2+y^2)dxdy = \iint_{D^*} r\ln r^2\, drd\theta =$$

$$2\int_0^{2\pi} d\theta \int_e^{e^2} r\ln r dr = 4\pi \int_e^{e^2} r\ln r dr = \pi e^2(3e^2-1).\Diamond$$

Примјер 4.10. Израчунати интеграл

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy$$

гдје је D: $x^2+y^2 \le 4x$.



Слика 4.16

Рјешење: Подручје интеграције је круг помјерен по x оси

$$(x-2)^2+y^2\le 4,$$

Слика 4.16. Уводимо поларне координате

$$x=rcos\theta,\ \ y=rsin\theta,\quad J(r,\theta)=r$$

и уврштавањем у једначину кружнице добијамо једначину кружнице у поларним координатама

$$r=4cos\theta.$$

Пошто је $r\ge 0$, одавде добијамо $cos\theta\ge 0$ тј. $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Уочимо да смо исти закључак могли извести и на основу слике круга D, јер се D налази у полуравни $x\ge 0$. Дакле, границе за θ и r су

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\qquad 0\le r\le 4cos\theta.$$

Имамо

$$I=\iint_{D^*} r^3\,drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{4cos\theta} r^3dr=64\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta d\theta=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2cos2\theta+\frac{1+cos4\theta}{2}\right)d\theta=24\pi.$$

Примијетимо да смо задатак могли урадити и увођењем **помјерених поларних координата**

$$x-2=rcos\theta,\qquad y=rsin\theta,\qquad J(r,\theta)=r.$$

У том случају је слика скупа D правоугаоник $D^*: 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2$, а за подинтегралну функцију имамо

$$f(2+rcos\theta,rsin\theta)=(2+rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta=4+2rcos\theta+r^2.$$

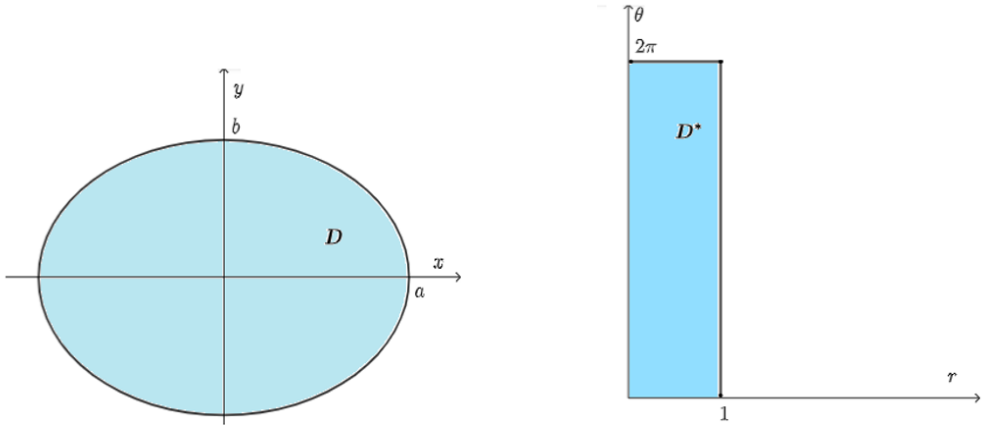
Дакле,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4 + 2rcos\theta + r^2) r dr = \int_0^{2\pi} \left(8 + \frac{8}{3} cos\theta + 4\right) d\theta = 24\pi. \quad \Diamond$$

Ако подинтегрална функција или једначина(е) границе подручја интеграције садрже израз

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

одређивање двојног интеграла се може поједноставити увођењем **уопштених поларних координата** r и θ



Слика 4.17

$$x = arcos\theta, \qquad y = brsin\theta. \tag{4.14}$$

Тада је

$$J(r, \theta) = abr$$

а фигура ограничена елипсом (Слика 4.17)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

се слика на правоугаоник

$$D^* = \{(r, \theta): 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le r \le 1\}.$$

4.1.6. Примјене двојних интеграла

❖ Одређивање површине фигуре у равни

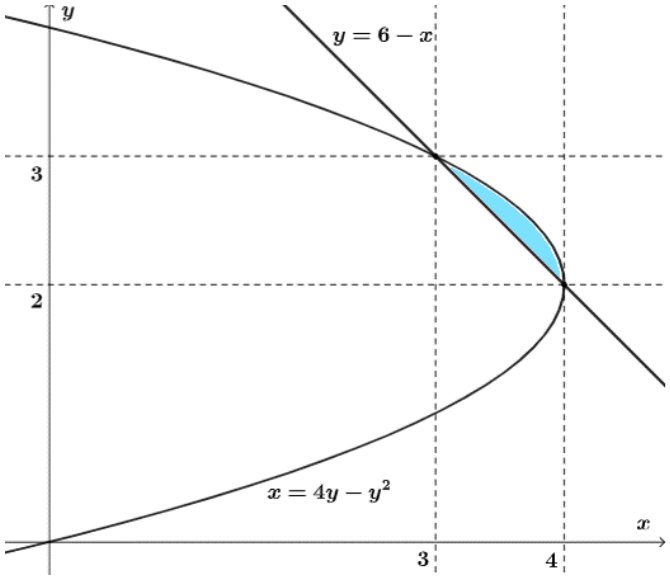
Из особина двојног интеграла имамо да је

$$\iint_D dxdy = P(D)$$

гдје је D ограничен скуп у xy −равни која има површину.

Примјер 4.11. Израчунати површину фигуре ограничене линијама

$$x = 4y - y^2, \qquad x + y = 6.$$



Слика 4.18

Рјешење: Подручје интеграције је ограничено правом $x + y = 6$ и параболом $x = 4y - y^2$, Слика 4.18. У овом случају задатак ћемо урадити коришћењем формуле (4.7), јер би за примјену формуле (4.5) требало изразити y из квадратне једначине (једначине параболе) што усложњава рјешавање. Имамо

$$P(D) = \iint_D dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx =$$

$$\int_2^3 (5y - y^2 - 6)dy = \frac{1}{3}. \quad \Diamond$$

Примјер 4.12. Израчунати површину фигуре ограничене линијама

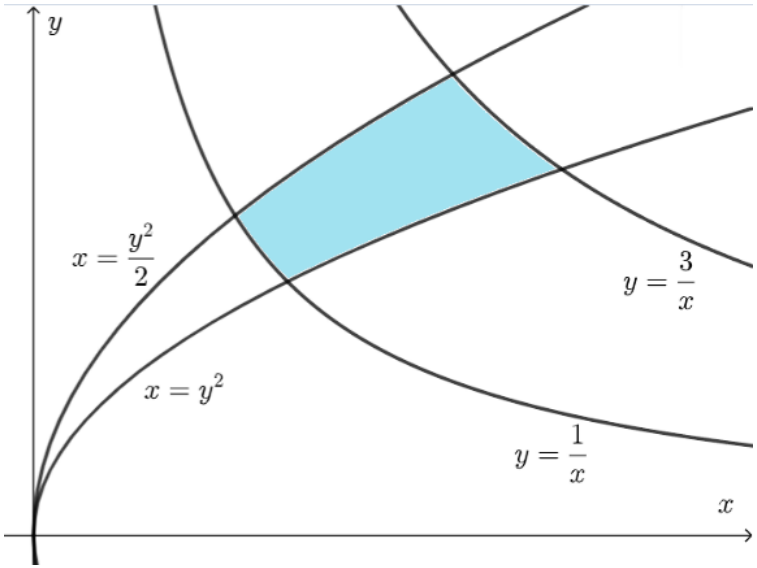
$$xy = 1, \qquad xy = 3, \qquad y^2 = x, \qquad y^2 = 2x.$$

Рјешење: За директно одређивање интеграла потребно је одредити пресјечне тачке датих кривих и интеграл рачунати као збир интеграла по одговарајућим подобластима (Слика 4.19). Зато поједностављујемо подручје интеграције помоћу смјене промјенљивих

$$xy = u, \qquad \frac{y^2}{x} = v$$

којом се D слика у правоугаоник

$$D^*: \quad 1 \le u \le 3, \qquad 1 \le v \le 2.$$



Слика 4.19

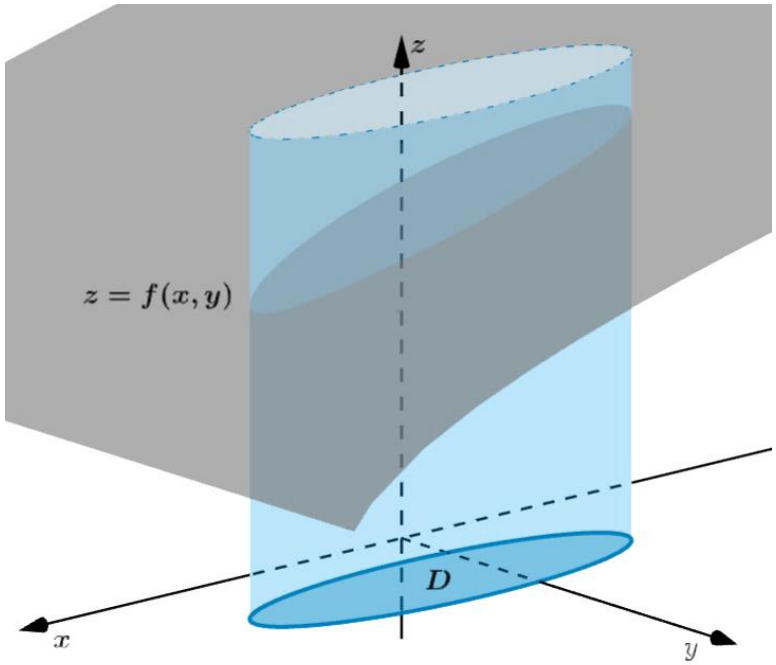
Даље је

$$\frac{1}{J(u,v)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} = 3v \Rightarrow |J(u,v)| = \frac{1}{3v}.$$

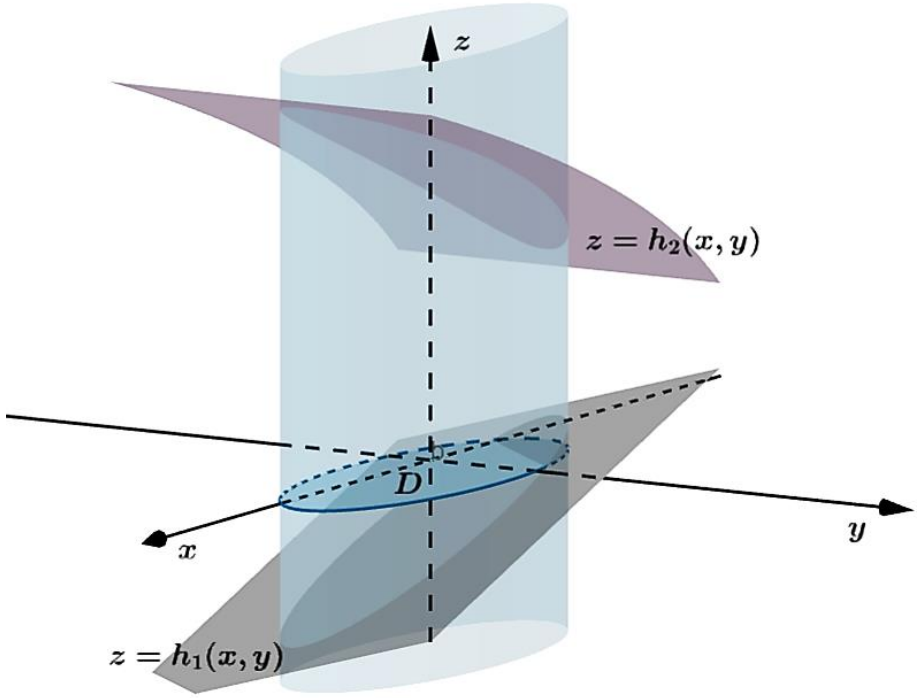
Имамо

$$P(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D^*} \frac{1}{v} dudv = \frac{1}{3}\int_1^3 du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{2}{3}\ln 2. \quad \Diamond$$

❖ Одређивање запремине тијела



Слика 4.20.



Слика 4.21

Из дефиниције и особина двојног интеграла ненегативне интеграбилне функције $f(x,y)$ на D добијамо да је запремина тијела $T = \{(x,y,z): 0 \leq z \leq f(x,y), (x,y) \in D\}$, Слика 4.20, једнака двојном интегралу функције f на D, тј.

$$V(T) = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Ако су функције $h_1(x,y)$ и $h_2(x,y)$ непрекидне на D и ако је

$$h_1(x,y) \le h_2(x,y), \quad (x,y) \in D$$

тада је запремина тијела ограниченог графицима функција h_1 и h_2 (Слика 4.21) дата са

$$V(T) = \iint_D (h_2(x,y) - h_1(x,y))dxdy.$$

Примјер 4.14. Израчунати запремину тијела ограниченог површима

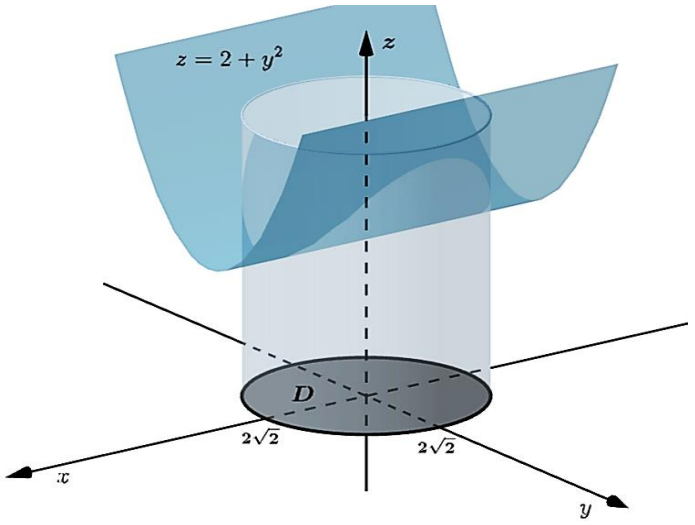
$$z = 2 + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad z = 0.$$

Рјешење: Цилиндар $x^2 + y^2 = 2$ је одоздо ограничен са равни $z = 0$, а одозго цилиндричном површи $z = 2 + y^2$ чије су изводнице паралелне x −оси, Слика 4.22. Имамо

$$V(T) = \iint_D (2 + y^2)dxdy$$

гдје је D круг $x^2 + y^2 \le 2, \quad z = 0.$

Скуп D се у поларним координатама слика на правоугаоник $D^* = \{(r,\theta): 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le r \le \sqrt{2}\}$, па је



Слика 4.22

$$V(T) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2r + r^3 sin^2\theta)dr = \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1 - cos2\theta}{2}\right) d\theta = 5\pi. \Diamond$$

❖ Одређивање масе, координата центра теже и момената инерције плоче

Посматрамо танку плочу која има облик раванске фигуре D са густином материје размазане по тој плочи $\rho(x,y)$. Ако је плоча хомогена, тј. ако је њена густина константна, тада је маса материје размазане на D једнака производу површине плоче и константне густине. Ако густина није константна, тада се **маса плоче** рачуна по формули

$$m(D) = \iint_D \rho(x,y)dxdy.$$

Центар теже плоче D која има густину $\rho(x,y)$ је тачка $(\bar{x},\bar{y})$ чије су координате

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy\,.$$

Ако је плоча хомогена, тада је

$$\bar{x} = \frac{k\iint_D xdxdy}{k\iint_D dxdy} = \frac{1}{P(D)}\iint_D xdxdy.$$

Аналогно се добија за координату $\bar{y}$, па су координате центра теже хомогене плоче дате са

$$\bar{x} = \frac{1}{P(D)}\iint_D xdxdy\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{P(D)}\iint_D ydxdy.$$

Моменат инерције материјалне тачке у односу на тачку (праву, раван) је једнак производу масе тачке (праве, равни) и квадрата њеног растојања од те тачке (праве, равни). Моменат инерције система материјалних тачака једнак је збиру момената инерције тих тачака.

Тако су **моменти инерције плоче D у односу на x, односно y −осу** дати са

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)dxdy\,, \qquad I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)dxdy$$

респективно, док је моменат инерције у односу на координатни почетак једнак

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy.$$

Примјер 4.16. Одредити координате центра теже плоче $D: x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ која има густину $\rho(x,y) = x^2+y^2$.

Рјешење: Имамо

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x(x^2+y^2)dxdy\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y(x^2+y^2)dxdy$$

гдје је D четвртина јединичног круга који се налази у првом квадранту. За масу плоче имамо

$$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{8}.$$

Координате центра теже су

$$\bar{x} = \frac{8}{\pi}\iint_D x(x^2+y^2)dxdy = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^4 cos\theta dr\right) d\theta = \frac{8}{5\pi},$$

$$\bar{y} = \frac{8}{\pi}\iint_D y(x^2+y^2)dxdy = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^4 sin\theta dr\right) d\theta = \frac{8}{5\pi}.\ \lozenge$$

4.2. ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ

4.2.1. Дефиниција тројног интеграла

Проширујемо концепт увођења интеграла на случај када је подручје интеграције затворен и ограничен скуп у простору. Посматрамо функцију $f(x,y,z)$ која је ограничена и дефинисана на затвореном и ограниченом скупу (подручју дефинисаности) T који има запремину. Да бисмо дефинисали подјелу скупа T, на почетку уводимо појам скупа запремине нула.

Кажемо да скуп има **запремину нула** ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји фамилија коцки таква да унија коцки из ове фамилије садржи тај скуп и да запремина ове уније није већа од ε. Показује се да површ која је график непрекидне функције $z = f(x,y)$ на скупу D има запремину нула.

Нека је P подјела скупа $T \subset \mathbb{R}^3$ на n дијелова (подобласти) $T_1, T_2, \dots, T_n$ таква да скупови T_i имају запремину, да је пресјек свака два од тих скупова запремине нула и да је

$$\bigcup_{i=1}^{n} T_i = T \quad \wedge \quad V(T) = \sum_{i=1}^{n} V(T_i).$$

Нека је $d(T_k) = \sup_{M,N \in T_k} d(M,N)$. За подјелу P дефинишемо **параметар подјеле**

$$\lambda(P) = \max_{k=1,\dots,n} d(T_k).$$

Изаберимо у свакој подобласти T_k произвољну тачку $\xi_k = (x_k, y_k, z_k)$, $k = 1,2 \dots, n$. Скуп тачака $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ називамо **скуп истакнутих тачака** који одговара подјели P. На овај начин се добија **подјела скупа са истакнутим тачкама** коју означавамо са (P, ξ).

Формирајмо **интегралну суму** која одговара датој подјели са истакнутим тачкама (P, ξ):

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, V(T_i)$$

Дефиниција 4.2. *Нека је функција $f(x, y, z)$ дефинисана на затвореном и ограниченом скупу $T \subset \mathbb{R}^3$. Ако постоји реалан број I такав да за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да за сваку подјелу са скупом истакнутих тачака (P, ξ) која испуњава услов $\lambda(P) < \delta$ вриједи*

$$|\sigma(f, P, \xi) - I| < \varepsilon,$$

*тада кажемо да је функција f **интеграбилна** на T и број I називамо **тројни интеграл** функције $f(x, y, z)$ на скупу T, при чему користимо ознаку*

$$I = \iiint_T f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Потребни, односно довољни услови за интеграбилност функције $f(x, y, z)$ на скупу T су слични условима интеграбилности функција једне промјењиве на сегменту, односно функције двије промјењиве на скупу у равни. Тако је о**граниченост функције $f(x, y, z)$ потребан услов да би она била интеграбилна,** тј. ако је функција интеграбилна на T, онда је она ограничена на T. Такође, ограниченост функције није довољан услов да би функција била интеграбилна

У погледу довољних услова за интеграбилност функције, и код тројних интеграла је **непрекидност функције $f(x, y, z)$ на T довољан услов за интеграбилност**, тј. свака непрекидна функција на T је интеграбилна на T. Такође, услов непрекидности функције није и потребан за њену интеграбилност и може да буде нарушен на неком скупу тачака из T који има запремину нула.

4.2.2. Особине тројног интеграла

Будући да је појам тројног интеграла дефинисан аналогно појмовима одређеног и двојног интеграла, природно је очекивати да има сличне особине као и двојни и одређени интеграл.

1) Нека је $V(T)$ запремина скупа T. Тада је

$$\iiint_T dxdydz = V(T).$$

2) Ако је $T^* \subset T$ скуп који има запремину и ако је функција f интеграбилна на T, тада је функција f интеграбилна на T^*.

3) Ако је f интеграбилна на скупу T који је подијељен на два подскупа T_1 и T_2 који имају запремину и чији је пресјек скуп запремине нула, тада је f интеграбилна и на T_1 и T_2 и вриједи

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{T_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{T_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

4) Ако су функције f и g интеграбилне на скупу T, тада је функција $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, такође интеграбилна на T и вриједи

$$\iiint_T (\alpha f + \beta g)dxdydz = \alpha \iiint_T f dxdydz + \beta \iiint_T g dxdydz.$$

5) Ако су f и g интеграбилне на скупу T и ако је $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ на T, тада је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_T g(x,y,z)dxdydz.$$

6) Ако је f интеграбилна на скупу T, тада је и функција $|f|$ интеграбилна на T и вриједи

$$\left|\iiint_T f(x,y,z)dxdydz\right| \leq \iiint_T |f(x,y,z)|dxdydz.$$

7) Ако је f ненегативна и интеграбилна на T и ако је $T^* \subset T$ скуп који има запремину, тада је

$$\iiint_{T^*} f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_T f(x,y,z)dxdydz.$$

Примјер 4.17. Доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{8}{3} \leq \iiint_T \frac{ze^y}{x}dxdydz \leq 12e^2$$

гдје је $T = \{(x,y,z): 1 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq y \leq 2,\ \ 2 \leq z \leq 3\}$.

Рјешење: Функција $f(x,y,z) = \frac{ze^y}{x}$ је непрекидна на T па је и интеграбилна на T. Пошто је на T

$$\frac{2}{3} \leq \frac{ze^y}{x} \leq 3e^2$$

коришћењем монотоности тројног интеграла (особина 6)) добијамо неједнакост

$$\frac{2}{3}\iiint_T dxdydz \leq \iiint_T \frac{ze^y}{x}dxdydz \leq 3e^2 \iiint_T dxdydz.$$

Из особине 1) тројног интеграла је $\iiint_T dxdydz = V(T) = 4$ одакле добијамо тражену неједнакост.◊

На сличан начин као за двојни интеграл доказује се теорема о средњој вриједности интегралног рачуна за тројни интеграл.

Теорема 4.11 (Теорема о средњој вриједности) *Нека су функције* f и g *интеграбилне на* T, *при чему је* $g(x,y,z) \geq 0 \quad (g(x,y,z) \leq 0)$ *за* $(x,y,z) \in T$ *и нека је* $m = \inf\limits_{(x,y,z)\in T} f(x,y,z)$, $M = \sup\limits_{(x,y,z)\in T} f(x,y,z)$. *Тада постоји* $\mu \in [m,M]$, *такав да је*

$$\iiint_T f(x,y,z)g(x,y,z)dxdydz = \mu \iiint_T g(x,y,z)dxdydz.$$

Ако је функција f *непрекидна на* T, *тада постоји тачка* $(c,d,e) \in T$ *таква да је*

$$\iiint_T f(x,y,z)g(x,y,z)dxdydz = f(c,d,e) \iiint_T g(x,y,z)dxdydz.$$

Стављајући у претходној теореми $g(x,y,z) = 1,\ (x,y,z) \in T$, добија се сљедећа посљедица.

Посљедица 4.2. *Нека је функција* f *интеграбилна на* T *и нека је* $m = \inf\limits_{(x,y,z)\in T} f(x,y,z)$, $M = \sup\limits_{(x,y,z)\in T} f(x,y,z)$. *Тада постоји* $\mu \in [m,M]$ *такав да је*

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \mu V(T).$$

Ако је функција f *непрекидна на* T, *тада постоји тачка* $(c,d,e) \in T$ *таква да је*

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = f(c,d,e)V(T).$$

4.2.3. Одређивање тројног интеграла

Одређивање тројног интеграла се може свести на израчунавање три одређена (узастопна) интеграла код којих су интервали интеграције генерисани подручјем интеграције тројног интеграла. Приликом оваквог представљања тројног интеграла потребно га је за почетак представити у облику два узастопна интеграла од којих је један двојни а други одређени интеграл. Наредна теорема говори о овом представљању тројног интеграла у случају када је подручје интеграције правоугли паралелепипед, Слика 4.24.

Теорема 4.12 *Нека је функција* $f(x,y,z)$ *интеграбилна на правоуглом паралелепипеду*

$$T = \{(x,y,z): a_1 \le x \le a_2, \quad b_1 \le y \le b_2, \quad c_1 \le z \le c_2\}.$$

Ако за свако $x \in [a_1, a_2]$ *постоји двојни интеграл*

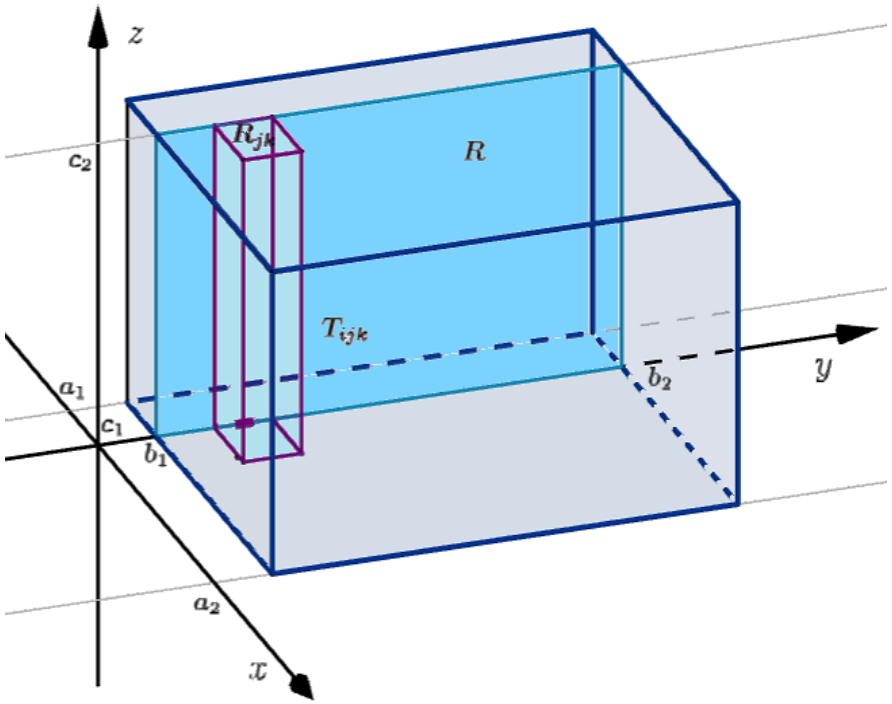
$$I(x) = \iint_R f(x,y,z)dydz$$

где је $R = [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, *тада постоји и интеграл*

$$\int_{a_1}^{a_2} I(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} \left(\iint_R f(x,y,z)dydz \right) dx$$

и вриједи

$$I = \iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} \left(\iint_R f(x,y,z)dydz \right) dx. \tag{4.15}$$



Слика 4.24

Свођењем двојног интеграла на одређене интеграле у фомули (4.15) добијамо

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dz.$$

Посматрајмо сада скуп T који се може представити у облику

$$T = \{(x,y,z):\ h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y),\ \ (x,y) \in D\} \qquad (4.16)$$

где је D ограничен затворен скуп у xy −равни, Слика 4.21.

Користећи претходну теорему и идеју доказа из Теореме 4.8 лако се доказује сљедећа теорема за израчунавање тројног интеграла ако је подручје интеграције облика (4.16).

Теорема 4.13 *Нека је функција* $f(x,y,z)$ *интеграбилна на скупу* T *облика (4.16) и нека за свако* $(x,y) \in D$ *постоји интеграл*

$$\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Тада је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy\,. \tag{4.17}$$

Ако се притом скуп D може представити у облику $D = \{(x,y): a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ формула (4.17) постаје

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{4.18}$$

На исти начин се добијају формуле за рачунање тројног интеграла уколико се подручје интеграције T може представити у облику

$$T = \{(x,y,z): p_1(y,z) \le x \le p_2(y,z), (y,z) \in D\},$$

односно у облику

$$T = \{(x,y,z): q_1(x,z) \le y \le q_2(x,z), (x,z) \in D\}.$$

Тада је

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right) dydz,$$

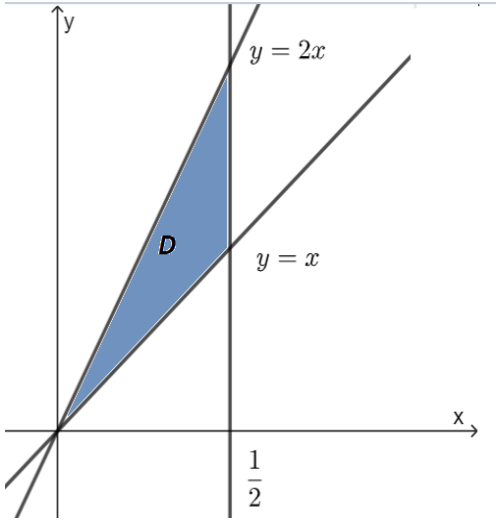
односно

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{q_1(x,z)}^{q_2(x,z)} f(x,y,z)dy \right) dxdz.$$

Примјер 4.18. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T z dxdydz$$

гдје је T тијело ограничено површима $x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ y = x, y = 2x,\ z = 0$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Слика 4.25

Рјешење: Тијело је ограничено тространом призмом са основом D у $xy-$равни (Слика 4.25) између равни $z = h_1(x,y) = 0$ и конуса $z = h_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Примјеном формула (4.17) и (4.18) добијамо

$$I = \iint_D \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz \right) dxdy = \iint_D \left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \right) dxdy =$$

$$\frac{1}{2}\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} (x^2 + y^2)\, dy = \frac{5}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 dx = \frac{5}{192}. \Diamond$$

4.2.4. Смјена промјенљивих у тројном интегралу

Нека је дато пресликавање

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w) \tag{4.19}$$

и нека је скуп T слика скупа T^* при пресликавању (4.19). Претпостављамо да је пресликавање (4.19) **обострано једнозначно**, па је из (4.19) могуће изразити u, v, w помоћу x, y, z:

$$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z).$$

Посматраћемо пресликавања код којих су функције $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ непрекидно диференцијабилне на T^*. Нека је

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \tag{4.20}$$

јакобијан пресликавања (4.17) и нека је $J(u, v, w) \neq 0$ на T^*.Слично као код двојног интеграла јакобијан пресликавања се може одредити и помоћу фомуле

$$\frac{1}{J(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}.$$

Вриједи сљедећа формула којом се успоставља веза између интеграла функције $f(x,y,z)$ на скупу T и интеграла функције $f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$ на скупу T^*.

Теорема 4.14 (Формула за смјену промјењљивих у тројном интегралу) *Нека је* $f(x,y,z)$ *интеграбилна на затвореном и ограниченом скупу* T *и нека су испуњени сљедећи услови:*

1) пресликавање (4.19) скупа T^* *на скуп* T *је обострано једнозначно,*

2) функције $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$ *су непрекидно диференцијабилне на* T^* *и*

3) $J(u,v,w) \neq 0$ *на* T^*.

Тада је

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{T^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw. \qquad (4.21)$$

Примједба 4.4. Формула (4.21) се може користити и ако је услов једнозначности пресликавања (4.21) нарушен на неком скупу из T^* који има запремину нула или ако је јакобијан једнак нули на неком скупу из T^* запремине нула.

4.2.5. Цилиндричне координате

Ако једначина(е) границе тијела T и/или подинтегрална функција садржи израз x^2+y^2, израчунавање тројног интеграла се може поједноставити увођењем **цилиндричних координата** r, θ и z. Нека је $M(x,y,z)$ тачка у Декартовом координатном систему и нека је $M'(x,y,0)$ њена пројекција у xy −раван. Цилиндрична координата r представља удаљеност тачке M' од координатног почетка а θ угао који радијус-вектор тачке M' гради са позитивним дијелом x −осе, Слика 4.26.

Дакле, веза између правоуглих и цилиндричних координата је дата једначинама

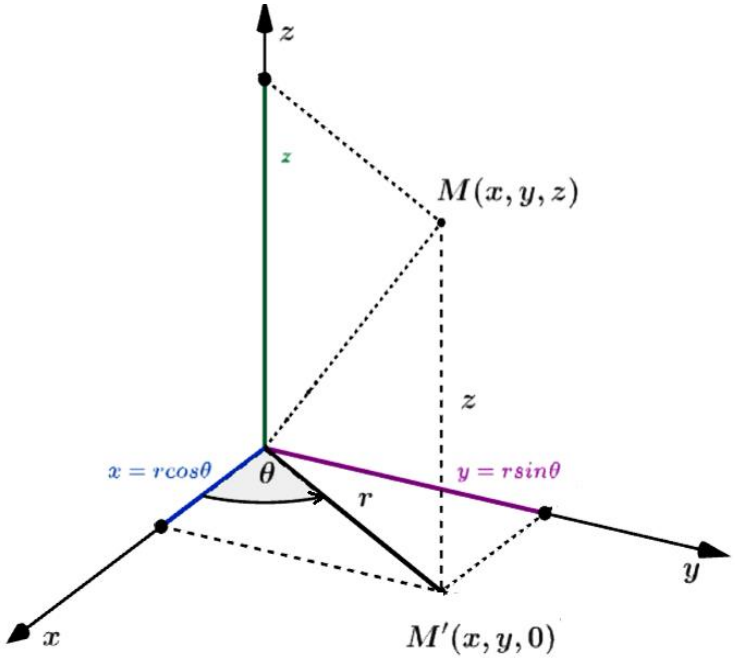
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \tag{4.22}$$

при чему је $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$.

Провјеримо сада да ли пресликавање (4.22) испуњава претпоставке за смјену промјењивих из Теореме 4.14. Функције

$$x(r,\theta,z) = r\cos\theta, y(r,\theta,z) = r\sin\theta, z(r,\theta,z) = z$$

су непрекидно диференцијабилне. Пресликавање дато са (4.22) је обострано једнозначно ако је $r > 0$ и ако θ ограничимо на интервал $0 \leq \theta < 2\pi$.



Слика 4.26

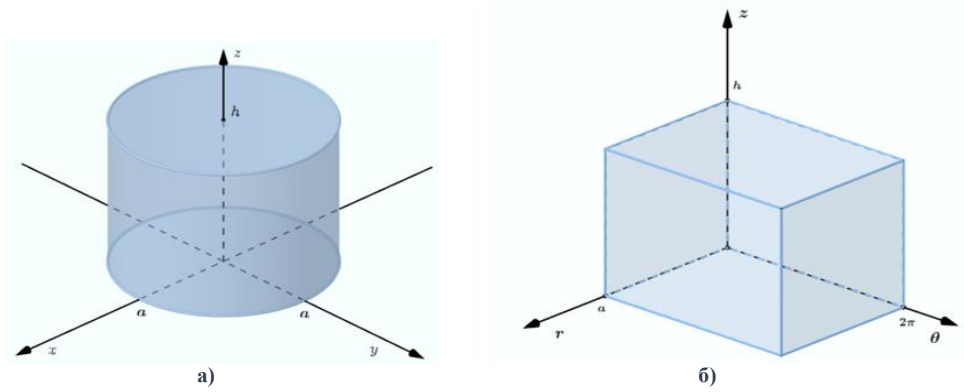
Јакобијан пресликавања је

$$J(r,\theta,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\theta & -rsin\theta & 0\\ sin\theta & rcos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}cos\theta & -rsin\theta\\ sin\theta & rcos\theta\end{vmatrix}=r$$

па је $J(r,\theta,z)\neq 0$ ако је $r>0$.

Дакле услови из Теореме 4.14 су нарушени на скупу тачака за које је $r=0$ или $\theta=2\pi$. Како овај скуп тачака има запремину нула, на основу Примједбе 4.4 закључујемо да можемо примијенити формулу (4.21) одакле добијамо формулу за смјену промјењљивих у цилиндричним координатама

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{T^*} f(rcos\theta,rsin\theta,z)rdrd\theta dz. \qquad (4.23)$$



а) б)

Слика 4.27

Ваљак $x^2+y^2\leq a^2,\ 0\leq z\leq h,$ Слика 4.27 а), се слика на квадар

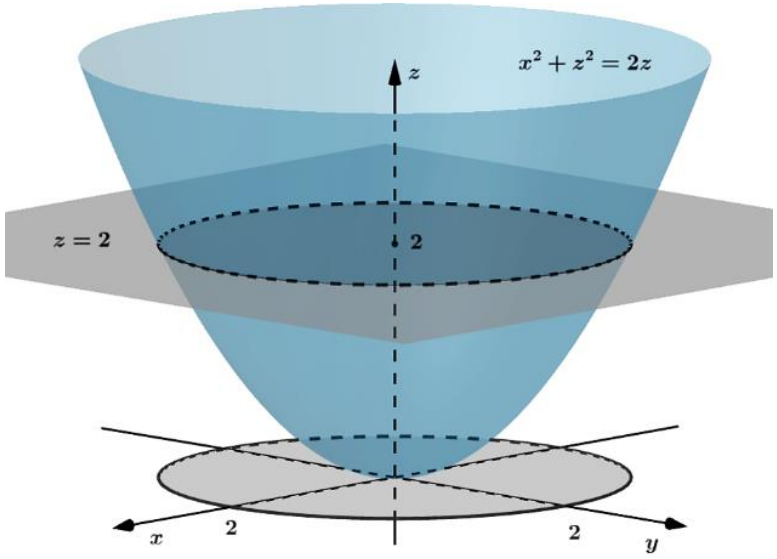
$$0\leq\theta\leq 2\pi,\qquad 0\leq r\leq a,\quad 0\leq z\leq h,$$

Слика 4.27 б), и то је разлог зашто се ова смјена промјењљивих често користи у случајевима када граница подручја интеграције садржи израз x^2+y^2.

Примјер 4.20. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2)dxdydz$$

гдје је T тијело ограничено површима $x^2 + y^2 = 2z$ и $z = 2$.



Слика 4.28

Рјешење: Пројекција пресјечне криве параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ и равни $z = 2$ у xy −раван је кружница $x^2 + y^2 = 4$. Зато је пројекција тијела T у xy −раван круг

$$x^2 + y^2 \leq 4,$$

Слика 4.28. Ако уведемо цилиндричне координате

$$x = rcos\theta, \qquad y = rsin\theta, \qquad z = z,$$

добијамо да се тијело T слика на тијело

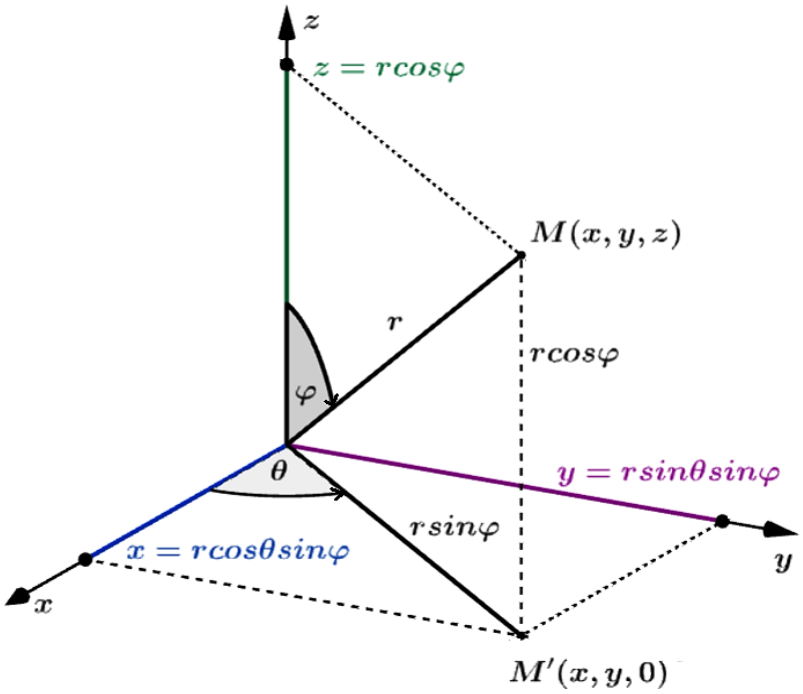
$$T^*: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \;\; 0 \leq r \leq 2, \;\; \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2.$$

Имамо

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint_{T^*} r^2 \cdot rd\theta drdz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = 2\pi \int_0^2 r^3 \left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{16\pi}{3}. \;\; \Diamond$$

4.2.6. Сферне координате



Слика 4.29

Уколико граница подручја интеграције и/или подинтегрална функција садржи израз облика $x^2+y^2+z^2$, тада се одређивање тројног интеграла може поједноставити увођењем **сферних координата** r, θ и φ.

Нека је $M(x,y,z)$ тачка у Декартовом координатном систему и нека је $M'(x,y,0)$ њена пројекција у xy −раван. Сферна координата r представља удаљеност тачке M од координатног почетка, θ угао који радијус-вектор тачке M' гради са позитивним дијелом x −осе и φ угао који радијус вектор тачке M гради са позитивним дијелом z −осе, Слика 4.29.

Дакле, веза између правоуглих и сферних координата је дата једначинама

$$x = r\cos\theta\sin\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\varphi, \tag{4.24}$$

при чему је $r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi$.

Испитујемо да ли пресликавање (4.22) испуњава претпоставке за смјену промјењивих из Теореме 4.14. Функције $x(r,\theta,\varphi)$, $y(r,\theta,\varphi)$ и $z(r,\theta,\varphi)$ дате са (4.24) су непрекидно диференцијабилне. Пресликавање је обострано једнозначно ако је $r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi < \pi$.

За јакобијан пресликавања имамо

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} cos\theta sin\varphi & -rsin\theta sin\varphi & rcos\theta cos\varphi\\ sin\theta sin\varphi & rcos\theta sin\varphi & rsin\theta cos\varphi\\ cos\varphi & 0 & -rsin\varphi\end{vmatrix}=-r^2 sin\varphi,$$

па је

$$|J(r,\theta,\varphi)|=r^2 sin\varphi.$$

Одавде добијамо да је $J(r,\theta,z)\neq 0$ ако је $r>0$ и $\varphi\neq 0$ и $\varphi\neq\pi$. Дакле, услови за примјену Теореме 4.14 су нарушени на скупу тачака за које је $r=0\vee\theta=2\pi\vee\varphi=0\vee\varphi=\pi$. Како овај скуп тачка има запремину нула закључујемо да можемо примијенити формулу за смјену промјењљивих. Из формуле (4.21) добијамо формулу за смјену промјењљивих у сферним координатама

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdzdy=\iiint_{T^*} f(rcos\theta sin\varphi, rsin\theta sin\varphi, rcos\theta)r^2 sin\varphi dr d\theta d\varphi. \qquad (4.25)$$

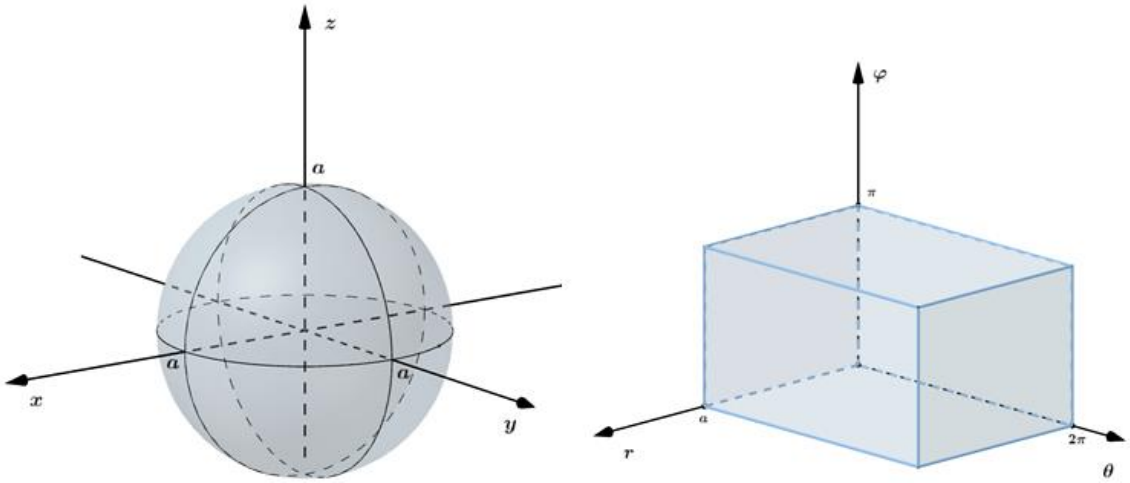
Јасно је да се кугла

$$x^2+y^2+z^2\leq a^2,$$

Слика 4.30 а), пресликавањем (4.24) пресликава на квадар

$$0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\varphi\leq\pi, 0\leq r\leq a,$$

Слика 4.30 б), због чега се ова смјена користи уколико границе подручја интеграције садрже израз $x^2+y^2+z^2$.



а) б)

Слика 4.30

Примјер 4.21. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

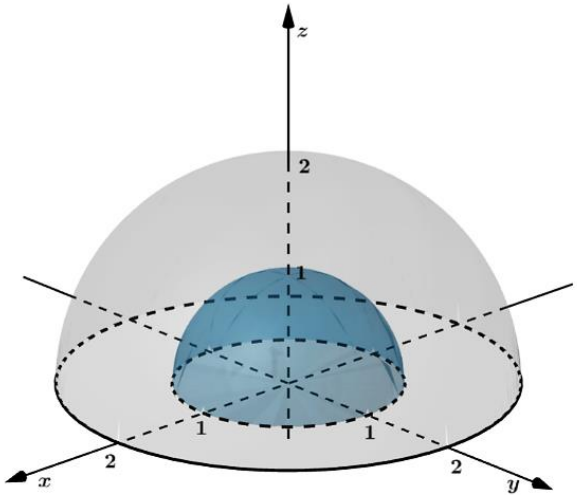
гдје је $T = \{(x, y, z): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$.

Рјешење: Тијело је ограничено са двије полусфере изнад xy −равни, Слика 4.31. Увођењем сферних координата тијело T се слика на квадар

$$T^*: 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \qquad 1 \leq r \leq 2.$$

Из формуле (4.25) добијамо

$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2} = \iiint_{T^*} \frac{r^2 sin\varphi}{r^2} drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi d\varphi \int_1^2 dr = 2\pi. \quad \Diamond$$



Слика 4.31

Примјер 4.22. Израчунати интеграл

$$I = \iiint_T z^2 dxdydz$$

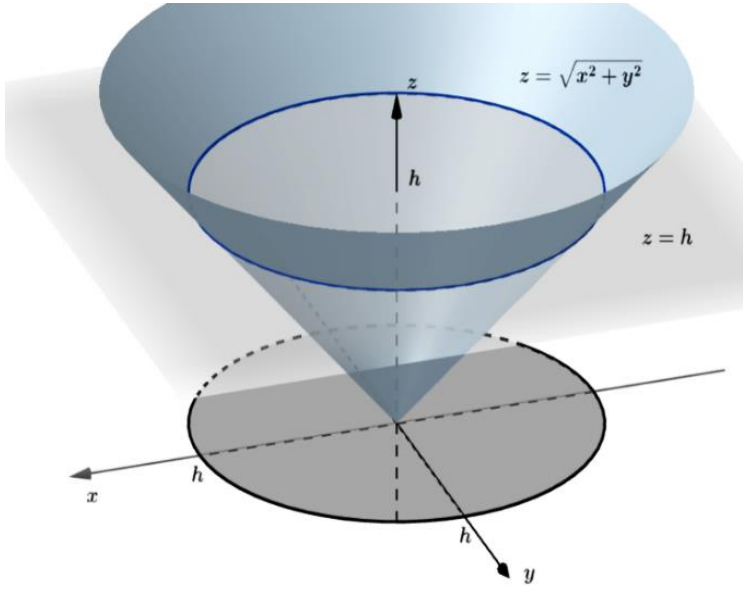
гдје је T ограничено површима $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = h, h > 0$.

Рјешење: Пројекција пресјечне криве конуса и равни је кружница $x^2 + y^2 = h^2$, Слика 4.32. Ако уведемо цилиндричне координате добијамо да се тијело T слика на тијело

$$T^*: 0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le 2, \qquad r \le z \le h.$$

Дакле

$$I = \iiint_T z^2 dxdydz = \iiint_{T^*} z^2 \cdot r d\theta dr dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_r^h z^2 dz = \frac{\pi h^5}{5}.$$



Слика 4.32

Задатак можемо урадити и помоћу сферних координата. Уврштавањем сферних координата у једначину конуса добијамо

$$rcos\varphi = \sqrt{r^2 sin^2\varphi(cos^2\theta + sin^2\theta)},$$

па је једначина конуса

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Једначина равни је

$$r = \frac{h}{cos\varphi}.$$

Слика тијела T у сферним координатама је

$$T^*: 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le r \le \frac{h}{cos\varphi}.$$

Добијамо

$$I = \iiint_T z^2 dxdydz = \iiint_{T^*} r^2 cos^2\varphi \cdot r^2 sin\varphi dr d\theta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\varphi sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{h}{cos\varphi}} r^4 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\varphi sin\varphi \frac{h^5}{cos^5\varphi} d\varphi =$$

$$\frac{2\pi h^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sin\varphi}{cos^3\varphi} d\varphi = \frac{2\pi h^5}{5} \cdot \frac{1}{2cos^2\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi h^5}{5}. \quad \Diamond$$

4.2.7. Примјене тројних интеграла

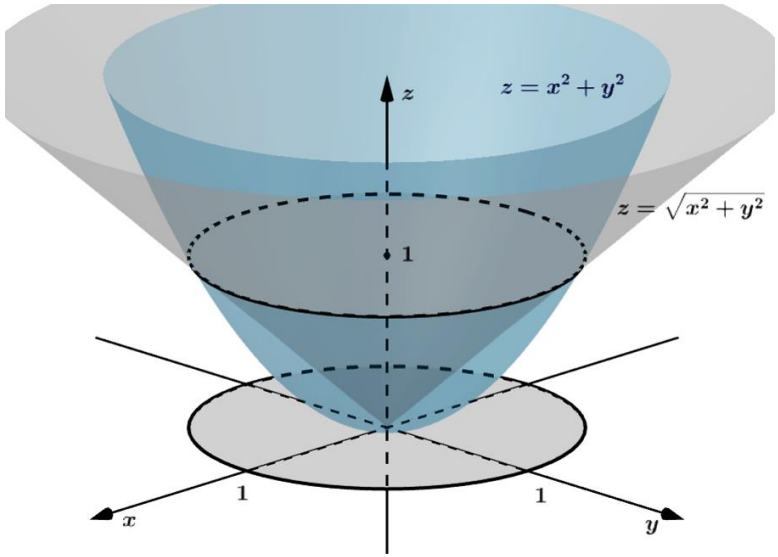
❖ Одређивање запремине тијела

Из особина тројних интеграла добијамо да је **запремина тијела** T једнака

$$\iiint_T dxdydz = V(T).$$

Примјер 4.23. Израчунати запремину тијела ограниченог површима

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } z = x^2 + y^2.$$



Слика 4.33.

Рјешење: Пројекцију пресјечне криве параболоида и конуса одређујемо из система једначина

$$z^2 = x^2 + y^2 \wedge z = x^2 + y^2.$$

Добијамо јединичну кружницу $x^2 + y^2 = 1$, Слика 4.33. Са слике се види да z узима вриједности од параболоида до конуса па уводимо цилиндричне координате. Једначине параболоида и конуса у цилиндричним координатама су $z = r^2$ и $z = r$ респективно, па се тијело T слика на

$$T^*: 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le 1, \quad r^2 \le z \le r.$$

Имамо

$$V(T) = \iiint_T dxdzdy = \iiint_{T^*} rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr \int_{r^2}^r dz = 2\pi \int_0^1 r(r - r^2)dr = \frac{\pi}{6}. \ \lozenge$$

❖ Одређивање масе, координата центра теже и момената инерције тијела

Ако је позната густина $\rho(x,y,z)$ тијела T, тада је његова **маса** једнака

$$m(T)=\iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz.$$

Центар теже тијела које има густину $\rho(x,y,z)$ је тачка $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ чије су координате

$$\bar{x}=\frac{1}{m(T)}\iiint_T x\rho(x,y,z)dxdydz,\quad \bar{y}=\frac{1}{m(T)}\iiint_T y\rho(x,y,z)dxdydz,\quad \bar{z}=\frac{1}{m(T)}\iiint_T z\rho(x,y,z)dxdydz.$$

Ако је тијело хомогено, добијамо координате центра теже у облику

$$\bar{x}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T xdxdydz\,,\qquad \bar{y}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T ydxdydz\,,\qquad \bar{z}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T zdxdydz.$$

Моменти инерције тијела T у односу на xy, xz и yz равни су једнаки

$$I_{xy}=\iiint_T z^2\rho(x,y,z)dxdydz\,, I_{xz}=\iiint_T y^2\rho(x,y,z)dxdydz\,, I_{yz}=\iiint_T x^2\rho(x,y,z)dxdydz,$$

а **моменти инерције у односу на координатне осе** су:

$$I_x=\iiint_T (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_y=\iiint_T (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz,$$
$$I_z=\iiint_T (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz.$$