УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2022/2023

ТЕМА 3: ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

ЛИТЕРАТУРА: **Биљана Војводић, Владимир Владичић: Математика II, Машински факултет, Бања Лука, 2022**

НАСТАВНИК: **проф. др Биљана Војводић**

ТЕМА 3: ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

3.1. ДЕФИНИЦИЈА ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

Функције једне реалне промјенљиве најчешће нису довољне за описивање различитих природних и друштвених појава и процеса, јер они обично зависе од већег броја других (не)зависних величина. Нпр. површина троугла је функција двије промјенљиве ако површину троугла основице a и висине h рачунамо по формули

$$P = P(a,h) = \frac{ah}{2},$$

или функција три промјенљиве ако површину троугла чије су странице a, b, c одређујемо помоћу Хероновог обрасца

$$P = P(a,b,c) = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}}.$$

Дефиниција 3.1. *Пресликавање* $f: D \to \mathbb{R}$ *гдје је* $D \subset \mathbb{R}^n$, *назива се* ***реална функција n реалних промјенљивих.***

Скуп D се назива **скуп дефинисаности (домен)** функције f.

Нпр. у формулама за површину троугла из самог геометријског значења јасно је шта су скупови дефинисаности: скупови тачака за које је $a > 0,\ h > 0,$ односно $a > 0,\ b > 0, c > 0.$

Функцију двије промјенљиве за $n = 2$, обично означавамо са

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

док за $n = 3$ користимо ознаку

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3.$$

За графичку интерпретацију функције једне реалне промјенљиве користили смо график функције. График функције можемо дефинисати и за функцију више промјенљивих, при чему геометријски можемо представити једино график функције двије промјенљиве.

График функције $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ је скуп тачака

$$S = \left\{\left(x, f(x)\right): x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

За функцију двије промјенљиве $z = f(x, y)$, график функције је најчешће **површ** у простору

$$S = \{(x, y, z): z = f(x, y), (x, y) \in D\}.$$

За функцију три промјенљиве можемо графички представити њен скуп дефинисаности, али не и њен график.

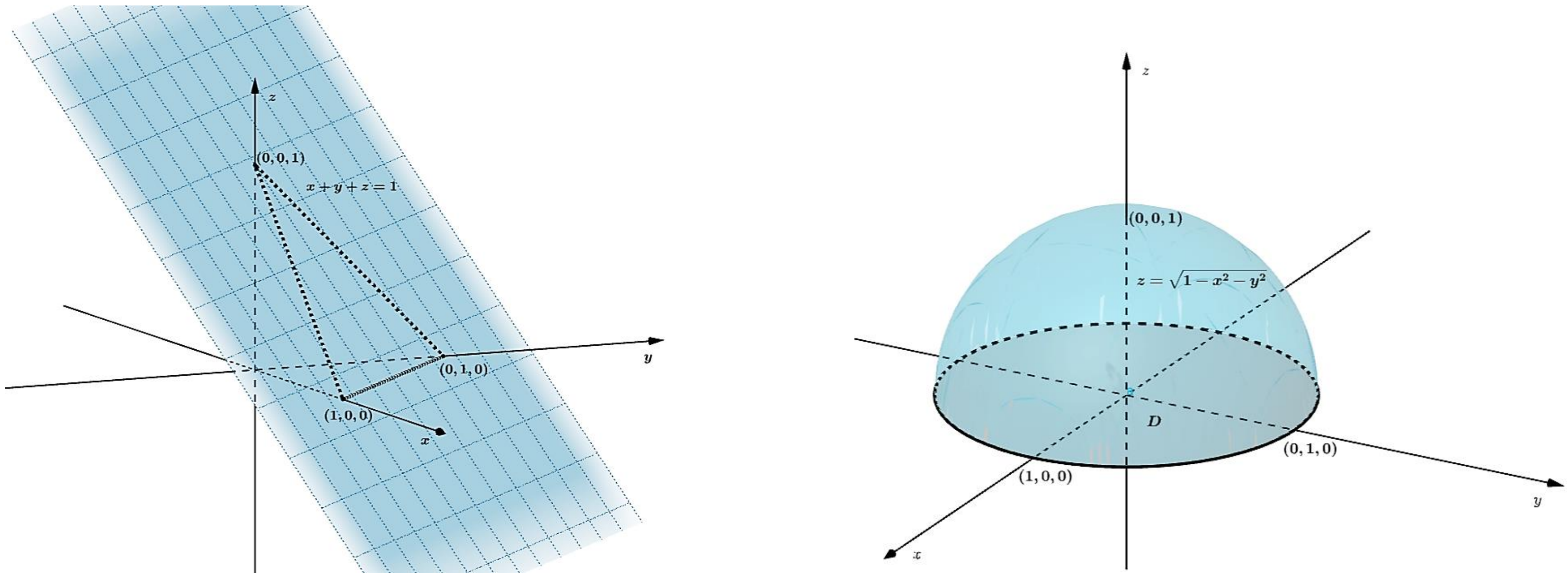
Примјер 3.1. а) Ако је

$$z = f(x, y) = -x - y + 1$$

онда је скуп дефинисаности функције $D = \mathbb{R}^2$. График ове функције је раван

$$x + y + z = 1$$

која исијеца једнакостранични троугао у првом октанту, Слика 3.1 а).



а) б)

Слика 3.1.

б) За функцију

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

скуп дефинисаности одређујемо из услова

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Добијамо

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

тј. скуп дефинисаности је јединични круг са центром у координатном почетку. График ове функције је горња полусфера полупречника $r = 1$ са центром у координатном почетку, Слика 3.1. б)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0. \ \lozenge$$

Један од основних геометријских појмова је удаљеност или растојање између објеката. Растојање између тачака $A(x_1, x_2)$ и $B(y_1, y_2)$ у $\mathbb{R}^2$ је

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Слично, растојање између тачака $A(x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$ у $\mathbb{R}^3$ је

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Ако су $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ двије тачке из $\mathbb{R}^n$, растојање између тачака A и B дефинишемо са

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

У наставку се упознајемо са појмовима кугла, околина тачке, те отворен и затворен скуп у $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 3.2. ***Отворена кугла*** *са центром у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *и полупречника* $r > 0$ *је скуп тачака*

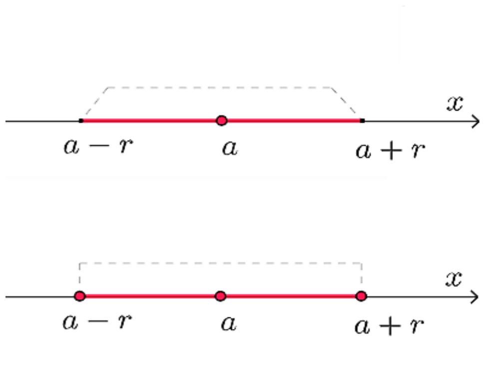
$$K_r(a) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r\}.$$

Скуп тачака

$$\overline{K}_r(a) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : d(a,x) \leq r\}$$

се назива ***затворена кугла*** *са центром у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *и полупречника* $r > 0$.

Примјер 3.2.



Слика 3.2 а)

Отворена кугла у $\mathbb{R}$ са центром у тачки a и полупречника r је скуп тачака x таквих да је

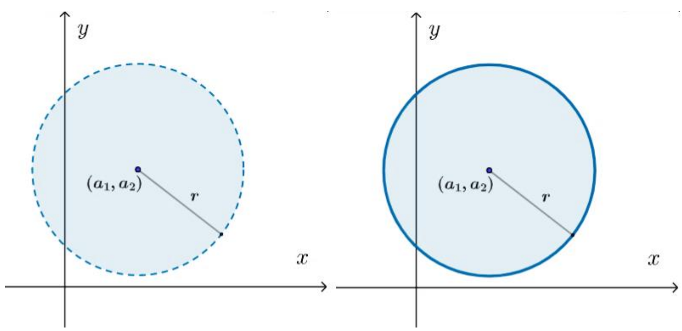
$$d(a,x) < r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2} < r \Leftrightarrow |x-a| < r \Leftrightarrow a-r < x < a+r$$

тј. отворена кугла је интервал

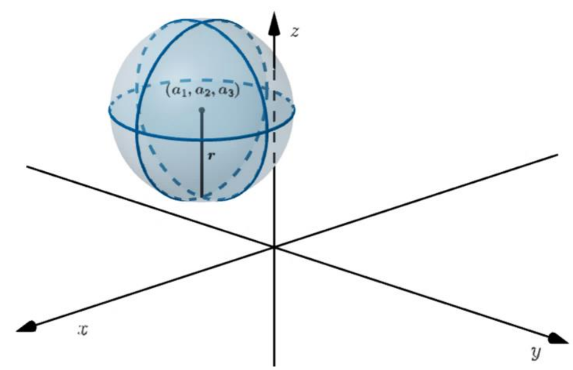
$$(a-r, a+r).$$

Слика 3.2 а). Затворена кугла у $\mathbb{R}$ са центром у тачки a и полупречника r је сегмент

$$[a-r, a+r].$$



Слика 3.2 б)



Слика 3.2 в)

Отворена кугла у $\mathbb{R}^2$ са центром у тачки $a = (a_1, a_2)$ и полупречника r је унутрашњост круга

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2,$$

Слика 3.2 б), док је затворена кугла унутрашњост круга заједно са кружницом

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r^2.$$

Отворена кугла у $\mathbb{R}^3$ са центром у $a = (a_1, a_2, a_3)$ и полупречника r је унутрашњост лопте (кугле)

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < r^2$$

одакле је и преузет термин „кугла“, Слика 3.2 в), док је затворена кугла унутрашњост кугле заједно са сфером

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2. \ \lozenge$$

Дефиниција 3.3. *Отворена кугла са центром у тачки* a *и полупречника* $\varepsilon > 0$ *назива се* $\boldsymbol{\varepsilon}$ ***−околина*** *тачке* a*.* ***Околина тачке*** a *је свака отворена кугла која садржи тачку* a.

За тачку $a \in \mathbb{R}^n$ кажемо да је **унутрашња тачка** скупа $D \subset \mathbb{R}^n$ ако она припада скупу D заједно са неком својом ε −околином.

Дефиниција 3.4. *За скуп* $D \subset \mathbb{R}^n$ *чије су све тачке унутрашње кажемо да је* ***отворен скуп.***

Кажемо да је тачка $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ **тачка нагомилавања** скупа $D \subset \mathbb{R}^n$ ако се у свакој њеној околини налази бар једна тачка из D која је различита од a. Битно је нагласити да тачка нагомилавања неког скупа може, али не мора припадати том скупу.

За произвољну тачку $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ кажемо да је **изолована тачка** скупа D уколико није тачка нагомилавања скупа D.

Поред унутрашњих тачака посматрамо и **граничне тачке** скупа D. Ове тачке имају особину да свака њихова околина садржи бар једну тачку из D и бар једну тачку која не припада том скупу. Скуп свих граничних тачака се назива **граница** скупа и означава се са ∂D.

Уочимо да гранична тачка скупа не мора да припада том скупу. Ако гранична тачка припада скупу тада она није унутрашња тачка скупа.

Дефиниција 3.5. *Кажемо да је скуп $D \subset \mathbb{R}^n$* ***затворен*** *ако садржи све своје граничне тачке.*

О односу отворених и затворених скупова говори сљедећа лема.

Лема 3.1. *Скуп $D \subset \mathbb{R}^n$ је затворен ако и само ако је његов комплемент $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$ отворен скуп.*

Уколико постоји кугла која садржи све тачке неког скупа онда кажемо да је тај скуп **ограничен.**

У наставку уводимо и појам криве у $\mathbb{R}^n$ коју дефинишемо на поопштеном интервалу I, тј. интервалу са граничним тачкама из $\overline{\mathbb{R}}$ које могу и да припадају том интервалу.

Дефиниција 3.6. *Скуп C тачака*

$$(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \qquad t \in I,$$

таквих да су $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, непрекидне функције на I, назива се ***крива*** *у $\mathbb{R}^n$.*

Крива C се обично записује у **параметарском облику**

$$x_1 = x_1(t),\ \ x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t),\ \ t \in I.$$

За $n = 2$ добијамо криву у равни (раванска крива) а за $n = 3$ криву у простору.

За скуп $D \subset \mathbb{R}^n$ кажемо да је **повезан** ако се сваке двије његове тачке могу спојити кривом чије све тачке припадају скупу D.

3.2. НИЗ У $\mathbb{R}^n$

Дефиниција 3.7. *Пресликавање* $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *називамо* ***низ (или низ тачака)*** *у* $\mathbb{R}^n$. *Вриједности пресликавања* $x(1), x(2), \dots, x(m)$ *називамо први, други,* $m-$*ти члан низа и ради једноставности краће их означавамо са* $x^1, x^2, \dots, x^m$.

Низ (пресликавање) у $\mathbb{R}^n$ означавамо са $(\boldsymbol{x^m})$.

Примјери низова $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ су:

$$x^m = (m, m^2), \qquad x^m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}\right), \qquad x^m = \left(\frac{1}{m}, 2\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Примјери низова $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ су:

$$x^m = \left(\frac{1}{m}, e^{-m^2}, 1\right), \qquad x^m = \left(\frac{2}{\sqrt{m}}, m, \frac{1}{cosm}\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Дефиниција 3.8. *Нека је дат низ тачака из* $\mathbb{R}^n$, $x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, $m \in \mathbb{N}$. *Кажемо да је тачка* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ***гранична вриједност низа*** (x^m) *ако вриједи*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 > 0)(\forall m \geq m_0)\ d(x^m, a) < \varepsilon.$$

За низ који има граничну вриједност кажемо да је ***конвергентан****. У супротном кажемо да је* ***дивергентан.***

То геометријски значи да је тачка a гранична вриједност низа (x^m) ако се у свакој $\varepsilon-$околини те тачке налазе „скоро сви“ чланови низа (сви чланови низа почевши од неког члана низа).

За одређивање граничне вриједности низова из $\mathbb{R}^n$ користи се сљедећа лема.

Лема 3.2. *Нека је у* $\mathbb{R}^n$ *дат низ тачака* (x^m), $x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, $m \in \mathbb{N}$ *и нека је* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. *Тада је*

$$\lim_{m\to\infty} x^m = a \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} x_i^m = a_i, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Из Леме 3.2. добијамо да се одређивање граничне вриједности низа (x^m) своди на одређивање граничних вриједности његових координата које су реални низови.

Претходна лема омогућава да највећи број тврђења која су вриједила за низове реалних бројева пренесемо на низове у $\mathbb{R}^n$. Тако вриједи да је гранична вриједност низа у $\mathbb{R}^n$ јединствена. Такође, гранична вриједност збира (разлике, производа или количника) конвергентних низова у $\mathbb{R}^n$ је конвергентан низ и његова гранична вриједност је збир (разлика, производ или количник) граничних вриједности посматраних низова.

Примјер 3.5. Наћи граничне вриједности низова

а) $x^m = \left(\dfrac{2m+1}{5-3m}, \dfrac{m^2+m+1}{5m+4m^2}\right)$, б) $x^m = \left(\dfrac{1}{m}, e^{-m^2}, 1\right)$.

Рјешење: а) Пошто је

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2m+1}{5-3m} = -\frac{2}{3} \wedge \lim_{m\to\infty} \frac{m^2+m+1}{5m+4m^2} = \frac{1}{4}$$

примјеном Леме 3.2 добијамо

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{2m+1}{5-3m},\frac{m^2+m+1}{5m+4m^2}\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right).$$

б) На исти начин добијамо

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m},e^{-m^2},1\right)=(0,0,1)\,.◊$$

За низове у $\mathbb{R}^2$, умјесто ознаке (x_1^m,x_2^m), обично користимо ознаку $(x_m,y_m), m\in\mathbb{N}$.

Дефиниција 3.9. *Кажемо да је низ тачака из* $\mathbb{R}^n$, $x^m=(x_1^m,x_2^m,\dots,x_n^m), m\in\mathbb{N}$ ***ограничен*** *ако постоји* $K>0$ *тако да је за све* $m\in\mathbb{N}$

$$d(x^m,0)<K$$

гдје је $0=(0,0,\dots 0)\in\mathbb{R}^n$.

Сваки конвергентан низ је ограничен, док обрнуто не мора да вриједи.

Примјер 3.6. За низ $(x_m,y_m)=((-1)^m,2)$ је

$$d\big((x_m,y_m),(0,0)\big)=\sqrt{(x_m)^2+(y_m)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

па је низ ограничен. Међутим низ није конвергентан јер низ реалних бројева $x_m=(-1)^m$ није конвергентан. Наиме, овај низ има два подниза са различитим граничним вриједностима: $x_{2k}=(-1)^{2k}=1$ и $x_{2k-1}=(-1)^{2k-1}=-1, k\in\mathbb{N}$ па је низ дивергентан. Дакле, низ (x_m,y_m) је дивергентан иако је ограничен. ◊

2.3. ГРАНИЧНА ВРИЈЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕЊЉИВИХ

Дефиниција 3.10. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *тачка нагомилавања скупа* D. *Кажемо да је реалан број* L ***гранична вриједност функције*** f *у тачки* a *и пишемо*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to a} f(x) = L,$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *такво да за све* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ *вриједи*

$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Ако је функција $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$, поред ознаке

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} f(x, y) = L$$

користимо и ознаку

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to a_1 \\ y \to a_2}} f(x, y) = L.$$

Примјер 3.7. Одредити граничне вриједности функција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ у тачки $(0,0)$ ако је

а) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3$,   б) $f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 2, & (x, y) \neq (0,0) \\ 1, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Рјешење: а) Докажимо да је $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 3$. Уочимо да је у $\mathbb{R}^2$ $d\big((x, y), (0,0)\big) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. За $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имамо

$$|f(x,y) - 3| = x^2 + y^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\varepsilon}$$

па можемо узети $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Дакле, за свако $\varepsilon > 0$ и за све $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ вриједи

$$d\big((x,y),(0,0)\big) < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |f(x,y) - 3| < \varepsilon$$

па је $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2 + 3) = 3$.

б) Докажимо да је $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 2$. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. За $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ имамо

$$|f(x,y) - 2| = 2x^2 + 3y^2 \leq 3x^2 + 3y^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$$

па можемо узети $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$. Дакле, да за свако $\varepsilon > 0$ и за све $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ вриједи

$$0 < d\big((x,y),(0,0)\big) < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \Rightarrow |f(x,y) - 2| < \varepsilon$$

па је гранична вриједност у тачки$(0,0)$ једнака 2. Уочимо да у овом примјеру услов $|f(x,y) - 2| < \varepsilon$ није испуњен у $(0,0)$ јер је $|f(0,0) - 2| = 1$. Такође, гранична вриједност у $(0,0)$ није једнака вриједности функције у тој тачки. ◊

Ако за функцију $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ једна или више промјенљивих теже ка $+\infty$ или $-\infty$, одговарајућа гранична вриједност се дефинише аналогно граничној вриједности функције једне промјенљиве.

Нпр. нека је f функција двије промјенљиве, $f: D \to \mathbb{R}$, $D = X \times (b, +\infty)$, и нека је a тачка нагомилавања скупа X. Кажемо да је **реалан број $\boldsymbol{L}$ гранична вриједност функције $\boldsymbol{f}$ за $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{y} \to +\infty$** и пишемо $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to +\infty}} f(x) = L$, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје $\delta > 0$ и $K > 0$ тако да за све $(x, y) \in D$ вриједи

$$(0 < |x - a| < \delta \wedge y > K) \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Такође, по аналогији са функцијама једне промјенљиве, дефинишу се и случајеви када функција више промјенљивих тежи $+\infty$ или $-\infty$.

Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ и нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања скупа D. Кажемо да **вриједност функције $\boldsymbol{f}$ тежи ка** $+\infty$ $(-\infty)$ **за $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$** и пишемо $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to a} f(x) = -\infty)$ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $K > 0$ тако да за све $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ вриједи

$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow f(x) > K \quad (f(x) < -K).$$

Везу између граничних вриједности низова и граничних вриједности функција даје Хајнеова теорема.

Теорема 3.1. (Хајнеова теорема) *Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ и нека је $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања скупа D. Тада је реалан број L гранична вриједност функције f у тачки a ако и само ако за сваки низ (x^m) тачака из скупа $D \setminus \{a\}$ који конвергира ка тачки a, одговарајући низ реалних бројева $(f(x^m))$ конвергира ка броју L.*

Примјер 3.9. Испитати да ли функција

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

има граничну вриједност у тачки $(0,0)$.

Рјешење: Уочимо два низа

$$(x_m,y_m)=\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\to(0,0)\quad \text{и}\quad (x_m{}',y_m{}')=\left(\frac{1}{m},\frac{2}{m}\right)\to(0,0)\ \ (m\to\infty).$$

Тада је

$$\lim_{m\to\infty}f(x_m,y_m)=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^2}}{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}}=0\quad \text{и}\quad \lim_{m\to\infty}f(x_m{}',y_m{}')=\lim_{m\to\infty}\frac{\frac{1}{m^2}-\frac{4}{m^2}}{\frac{1}{m^2}+\frac{4}{m^2}}=-\frac{3}{5}$$

па на основу Хајнеове теореме не постоји $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)$. ◊

Код функције једне промјенљиве потребан и довољан услов за постојање граничне вриједности у тачки a је постојање и једнакост лијеве и десне граничне вриједности у тој тачки. Посматрање лијеве и десне граничне вриједности у тачки a произилази из природе околина у $\mathbb{R}$ које су интервали.

Пошто су околине тачке a у $\mathbb{R}^n$ кугле, за функцију $f\colon D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ можемо посматрати граничне вриједности дуж произвољне криве $C\subset D$ у тачки нагомилавања скупа $D\cap C$, као и однос између граничне вриједности функције и граничне вриједности функције дуж те криве.

Дефиниција 3.11. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $C \subset D$ *крива у* $\mathbb{R}^n$ *таква да је* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *тачка нагомилавања скупа* $D \cap C$. *Кажемо да је реалан број* L ***гранична вриједност функције*** $\boldsymbol{f}$ ***у тачки*** $\boldsymbol{a}$ ***дуж криве*** $\boldsymbol{C}$ *и пишемо*

$$\lim_{\boldsymbol{C} \ni \boldsymbol{x} \to a} f(x) = L,$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *тако да за све* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \cap C$ *вриједи*

$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Уколико је крива C дата у параметарском облику

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t), \qquad t \in I$$

и ако је $(a_1, a_2, \dots, a_n) = \big(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)\big)$ за неко $t_0 \in I$, из Дефиниције 3.11 добијамо да функција f има граничну вриједност L у тачки a дуж криве C ако је

$$\lim_{t \to t_0} f\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big) = L.$$

Показује се да уколико постоји гранична вриједност функције f у тачки a онда постоје и граничне вриједности у тачки a дуж произвољне криве C за коју је a тачка нагомилавања скупа $D \cap C$. Овај резултат наводимо за функцију двије промјенљиве и за случај када је $I = [\alpha, \beta]$.

Теорема 3.2. *Нека је* $f\colon D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ *и нека је* L *гранична вриједност функције* f *у тачки* (a_1, a_2). *Нека је*

$$C\colon \quad x = x(t), \qquad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

произвољна крива таква да је (a_1, a_2) *тачка нагомилавања скупа* $D \cap C$ *и* $(a_1, a_2) = \big(x(t_0), y(t_0)\big)$ за неко $t_0 \in [\alpha, \beta]$. *Тада постоји гранична вриједност функције* f *дуж криве* C *у тачки* (a_1, a_2) *и вриједи*

$$\lim_{t \to t_0} f\big(x(t), y(t)\big) = L.$$

Примјер 3.11. Испитати да ли постоје граничне вриједности

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Рјешење: а) Испитајмо понашање функције $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ претпостављајући да тачка (x, y) тежи $(0,0)$ дуж праве $y = kx$. Имамо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{kx^2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Одавде закључујемо да гранична вриједност функције дуж правих $y = kx$ зависи од k (за различите праве, тј. различито k, добијамо различите граничне вриједности), па на основу Теореме 3.2 добијамо да не постоји гранична вриједност функције f у тачки $(0,0)$.

б) Испитујемо понашање функције $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ узимајући да тачка (x, y) тежи $(0,0)$ дуж праве $y = kx$. Имамо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{(x^2+k^2)x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = 0.$$

Одавде закључујемо да постоји гранична вриједност дуж сваке праве $y = kx$ и да је једнака нули. То међутим не значи да је гранична вриједност функције $f(x,y)$ једнака нули. Ако нпр. узмемо да тачка (x,y) тежи $(0,0)$ дуж параболе $y = x^2$ добијамо

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

па на основу Теореме 3.2 закључујемо да не постоји гранична вриједност функције f у $(0,0)$.◊

Особине граничних вриједности функција више промјенљивих су аналогне особинама граничних вриједности функција једне реалне промјенљиве. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.3. *Нека функције* $f, g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *имају у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *реалне граничне вриједности* L_1 и L_2, *респективно. Тада функције*

$$f+g: D \to \mathbb{R}, \quad \alpha f: D \to \mathbb{R}\ (\alpha \in \mathbb{R}), \quad f \cdot g: D \to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g}: D \setminus \{x \in D: g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$$

имају граничне вриједности у тачки a *и вриједи:*

1) $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = L_1 + L_2,$

2) $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = L_1 L_2,$

3) $\lim\limits_{x\to a} (\alpha f)(x) = \alpha L_1,$

4) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

3.4. НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

Дефиниција 3.12. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $a \in D$ *тачка нагомилавања скупа* D. *Кажемо да је функција* f ***непрекидна*** *у тачки* a *ако је*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Ако је a *изолована тачка скупа* D, *тада је функција* f ***непрекидна у тачки*** a.

Ако је функција f *непрекидна у свакој тачки скупа* $A \subset D$, *тада кажемо да је функција* f ***непрекидна на скупу*** A**.**

Примјер 3.12. Функција

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 2, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

није непрекидна у тачки у $(0,0)$ јер смо у Примјеру 3.7 показали да је $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 2$, док је с друге стране $f(0,0) = 1$. Дакле,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 2 \neq 1 = f(0,0)$$

па функција није непрекидна у тачки $(0,0)$. ◊

Дефиницију непрекидности функције можемо формулисати и помоћу тоталног прираштаја функције.

Дефиниција 3.13. ***Тотални прираштај*** *функције* $u = f(x)$ *у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *је функција прираштаја аргумента* $\Delta x = x - a = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ *дефинисана са*

$$\Delta u = \Delta f(a)(\Delta x) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) =$$

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ради једноставности у наставку умјесто $\Delta f(a)(\Delta x)$ пишемо само $\Delta f(a)$.

Сада из Дефиниције 3.12 добијамо да је функција $f\colon D \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки нагомилавања $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ скупа D ако њен тотални прираштај у тачки a тежи нули када прираштај аргумента у тој тачки тежи нули, тј. ако је $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0$.

За функцију $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може се посматрати непрекидност по једној промјенљивој, при фиксираним вриједностима осталих промјенљивих. У том случају се посматра прираштај функције само по једној промјенљивој који зовемо парцијални прираштај.

Дефиниција 3.14. ***Парцијални прираштај*** *функције* $u = f(x)$ *по промјенљивој* x_k, $k = 1,2, \dots, n$ *у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *дефинишемо са*

$$\Delta_{x_k} u = \Delta_{x_k} f(a) = f(a_1, a_2, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)$$

гдје је $\Delta x_k = x_k - a_k$ *прираштај промјенљиве* x_k, $k = 1,2, \dots, n$.

Кажемо да је функција $u = f(x)$ **непрекидна у тачки** $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ **по промјенљивој** $\boldsymbol{x_k}$ ако

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} f(a) = 0.$$

Из непрекидности функције f у тачки a слиједи непрекидност функције у тој тачки по свакој од промјенљивих $x_k,\ k = 1, \dots, n$. Обрнуто не мора да вриједи што илуструје сљедећи примјер.

Примјер 3.13. Функција

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

на основу Примјера 3.11 а) нема граничну вриједност у $(0,0)$ па у тој тачки није непрекидна. Испитајмо сада непрекидност функције у тачки $(0,0)$ по свакој од промјенљивих x и y посебно, посматрајући парцијалне прираштаје у тачки $(0,0)$. Имамо

$$\Delta_x f(0,0) = f(\Delta_x, 0) - f(0,0) = \frac{\Delta_x \cdot 0}{(\Delta_x)^2 + 0^2} = 0, \Delta_y f(0,0) = f\left(0, \Delta_y\right) - f(0,0) = \frac{0 \cdot \Delta_y}{0^2 + \left(\Delta_y\right)^2} = 0$$

па је

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x f(0,0) = 0 = f(0,0), \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y f(0,0) = 0 = f(0,0)$$

што значи да је функција непрекидна у (0,0) по свакој од промјенљивих x и y посебно. ◊

Тачке у којима функција није непрекидна називају се **тачке прекида** те функције.

Особине непрекидних функција више промјенљивих сличне су особинама непрекидних функција једне промјенљиве.

Теорема 3.4. *Нека су функције* $f, g: D \to \mathbb{R}$ *непрекидне у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. *Тада су и функције* $f + g$, αf $(\alpha \in \mathbb{R})$ и $f \cdot g$ *непрекидне у тачки* a. *Ако је* $g(a) \neq 0$ *и* $\frac{f}{g}: D \setminus \{x \in D: g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, *тада је и функција* $\frac{f}{g}$ *непрекидна у тачки* a.

Композиција непрекидних функција је такође непрекидна функција. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.5. *Нека је* $T \subset \mathbb{R}^k$ *непразан скуп и нека су функције* $\varphi_i: T \to \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n$ *непрекидне у тачки* $t_0 = \left(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0\right) \in T$. *Ако је* $D = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)): t \in T\}$ *и ако је функција* $f: D \to \mathbb{R}$ *непрекидна у тачки* $a = \left(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)\right)$, *тада је и сложена функција*

$$u = f\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\right)$$

непрекидна у тачки t_0.

Кажемо да је функција $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ **ограничена** на скупу D ако постоји број $K > 0$ такав да је за све $x \in D$

$$|f(x)| \leq K.$$

Непрекидна функција на ограниченом и затвореном скупу је на том скупу и ограничена и достиже своју најмању и највећу вриједност у неким тачкама тог скупа. Овај резултат је аналогон Вајерштрасове теореме за функцију једне реалне промјенљиве.

Теорема 3.6. (Вајерштрасова теорема) *Ако је функција* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *непрекидна на ограниченом и затвореном скупу* D, *тада постоје тачке* $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in D$ *такве да за све* $x \in D$ *вриједи*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b).$$

Из дефиниције непрекидности закључујемо да за функцију која је непрекидна у тачки увијек можемо изабрати параметар варијације аргумента у тој тачки (δ) тако да варијација вриједности функције буде произвољно мала (ε). Другим ријечима, када је аргумент довољно близу тој тачки, тада су вриједности функције произвољно близу вриједности функције у тој тачки.

Овакво објашњење појма непрекидности функције у тачки се може једноставно поопштити на начин да се не односи на варијацију аргумента у тачки већ на варијацију аргумента на неком скупу, што нас доводи до појма равномјерне (униформне) непрекидности функције на скупу.

Дефиниција 3.15. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $A \subset D$. *Ако за произвољно* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *тако да за све* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in A$ *вриједи*

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

тада кажемо да је функција f ***равномјерно (униформно) непрекидна на скупу A.***

Равномјерно непрекидна функција има особину да за све аргументе из скупа A који су међусобно довољно близу, вриједности функције у тим аргументима су произвољно близу.

Уколико је функција равномјерно непрекидна на скупу A, из дефиниција 3.12 и 3.15 је јасно да је она на том скупу и непрекидна.

Сљедећа Хајнеова теорема даје потребне и довољне услове за равномерну непрекидност функције на скупу.

Теорема 3.7. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $A \subset D$. *Функција* f *је равномјерно непрекидна на скупу А ако и само ако за два произвољна низа* (x^m) *и* (y^m) *са елементима из скупа А таква да је* $\lim_{m\to\infty} d(x^m, y^m) = 0$ *вриједи*

$$\lim_{m\to\infty} |f(x^m) - f(y^m)| = 0.$$

Примјер 3.15. Испитати да ли је функција $f: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

равномјерно непрекидна на скупу $A = (0,2) \times (0,2)$.

Рјешење: Посматрајмо низове

$$x^m = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \text{ и } y^m = \left(\frac{1}{2m}, \frac{1}{2m}\right).$$

Очигледно је да су сви елементи ових низова из скупа A. Такође је

$$\lim_{m\to\infty} d(x^m, y^m) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right)^2 + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m}\right)^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{m} = 0.$$

Ипак, пошто је

$$\lim_{m\to\infty}|f(x^m)-f(y^m)|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}-\frac{1}{\frac{1}{2m}\cdot\frac{1}{2m}}\right|=\lim_{m\to\infty}3m^2=+\infty\neq 0,$$

на основу Теореме 3.7 закључујемо да функција f није равномјерно непрекидна на скупу A.◊

Видјели смо да се Вајерштрасова теорема може поопштити на функције више промјенљивих, Теорема 3.6. Аналогно поопштење имамо и за Канторову теорему о равномјерној непрекидности.

Теорема 3.8. (Канторова теорема) *Ако је функција* $f: D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}^n$ *непрекидна на ограниченом и затвореном скупу* $A\subset D$, *тада је функција* f *равномјерно непрекидна на* A.

На крају дајемо и поопштење Коши-Болцанове[1] теореме о међувриједности на функције више промјенљивих.

Теорема 3.9. (Коши-Болцано) *Нека је функција* $f: D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}^n$ *непрекидна на ограниченом, затвореном и повезаном скупу* $A\subset D$ *и нека је* $m=\min_{x\in D} f(x)$, $M=\max_{x\in D} f(x)$. *Тада за сваку тачку* $b\in(m,M)$ *постоји тачка* $a\in A$ *таква да је* $f(a)=b$.

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789 –1857), француски математичар, физичар и инжењер,
Bernard Bolzano (1781 –1848), чешки математичар и филозоф

3.5. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ

Извод функције једне промјенљиве је дефинисан као гранична вриједност количника прираштаја функције и прираштаја аргумента када прираштај аргумента тежи нули, тј.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Циљ нам је да појам извода и диференцијабилности поопштимо на функције више промјенљивих. За разлику од функција једне промјенљиве, прираштај функције више промјенљивих се може мијењати на различите начине и по различитим промјенљивим, односно можемо посматрати тотални прираштај, али исто тако и парцијалне прираштаје функције (дефиниције 3.13 и 3.14). На почетаку посматрамо случај када се функција мијења само по једној промјенљивој, док су остале промјенљиве фиксиране.

Нека је $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, D је отворен скуп и $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. Нека је Δx_k прираштај промјенљиве x_k такав да $(a_1, a_2, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_n) \in D$ и нека је $\Delta_{x_k} f(a)$ парцијални прираштај функције f по промјенљивој x_k у тачки a, Дефиниција 3.14.

Дефиниција 3.16. ***Парцијални извод*** *функције* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *по промјенљивој* x_k, $k = 1, \dots, n$ *у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ *дефинишемо са*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_{x_k} f(a)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n)}{\Delta x_k}$$

уколико горња гранична вриједност постоји и коначна је.

Парцијални извод функције f по промјенљивој x_k, $k = 1, \dots n$ у тачки a означавамо са

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad \text{или} \quad f'_{x_k}(a), \qquad k = 1,2, \dots, n.$$

Уочимо да је $f'_{x_k}(a)$ заправо извод функције $f(a_1, \dots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \dots, a_n)$ у тачки a_k, па се рачунање парцијалних извода своди на рачунање извода функције једне промјенљиве, док су остале промјенљиве константне. Због тога правила диференцирања функције једне реалне промјенљиве (правила збира, производа, количника и правило извода сложене функције) важе и приликом одређивања парцијалних извода.

За функцију двије промјенљиве $z = f(x,y)$ из Дефиниције 3.16 добијамо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \frac{\partial z}{\partial x}(a_1, a_2) = f'_x(a_1, a_2) = z'_x(a_1, a_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial z}{\partial y}(a_1, a_2) = f'_y(a_1, a_2) = z'_y(a_1, a_2) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + \Delta y) - f(a_1, a_2)}{\Delta y}.$$

Примјер 3.16. Наћи парцијалне изводе функција

а) $z = f(x,y) = 2xy^3 + 2x - 5y + 3,$ б) $z = f(x,y) = arctg\,\frac{x}{y}.$

Рјешење:

а) $z'_x = 2y^3 + 2, \quad z'_y = 6xy^2 - 5,$

б) $z'_x = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2 + y^2}, \qquad z'_y = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{x}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}\ .$ ◊

Егзистенција парцијалних извода не пружа много информација о самој функцији. Тако је нпр. могуће да постоје парцијални изводи у некој тачки а да та тачка буде тачка прекида функције.

Примјер 3.17. Парцијалне изводе функције $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

у тачки $(0,0)$ одређујемо на сљедећи начин:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=0$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=0.$$

Дакле, у тачки $(0,0)$ постоје парцијални изводи иако смо у Примјеру 3.13 показали да ова функција није непрекидна у тачки $(0,0)$. ◊

За дефинисање појма диференцијабилности функције више промјенљивих, присјетимо се овог појма за функцију једне промјенљиве. Уколико функција $f\colon D\to\mathbb{R},\ D\subset\mathbb{R}$ у тачки a има извод $f'(a)$, онда се њен прираштај у тој тачки може представити у облику

$$\Delta f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\Delta x+\beta(\Delta x)\Delta x$$

при чему $\beta(\Delta x)\to 0$ када $\Delta x\to 0$.

Преносећи ово представљање прираштаја на тотални прираштај функције више промјенљивих (Дефиниција 3.13) и уводећи ознаке

$$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n), \quad |\Delta x| = \sqrt{{\Delta x_1}^2 + {\Delta x_2}^2 + \cdots + {\Delta x_n}^2}$$

долазимо до сљедеће дефиниције диференцијабилости функције n промјенљивих.

Дефиниција 3.17. *Кажемо да је функција* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ***диференцијабилна*** *у тачки* $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ *ако се њен тотални прираштај у тој тачки може представити у облику*

$$\Delta f(a) = L_1\Delta x_1 + L_2\Delta x_2 + \cdots + L_n\Delta x_n + \beta(\Delta x)|\Delta x| \tag{3.6}$$

за неке реалне бројеве L_i, $i = 1,2,\dots n$, *при чему* $\beta(\Delta x) \to 0$ *за* $\Delta x \to 0$.

Диференцијал функције једне промјенљиве смо дефинисали као линеарни сабирак $f'(a)\Delta x$ у прираштају функције, тј. $df(a) = f'(a)\Delta x$. Аналогно, диференцијал функције n промјенљивих дефинишемо као **линеарну функцију аргумента** $\boldsymbol{\Delta x}$ у тоталном прираштају функције (3.6).

Дефиниција 3.18. *Нека је функција* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *диференцијабилна у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. *Линеарна функција*

$$L_1\Delta x_1 + L_2\Delta x_2 + \cdots + L_n\Delta x_n$$

се назива ***диференцијал функције*** f *у тачки* a *и означава се са*

$$df(a) = L_1\Delta x_1 + L_2\Delta x_2 + \cdots + L_n\Delta x_n.$$

У Примјеру 3.17 видјели смо да само постојање парцијалних извода у тачки није довољно за непрекидност функције у тој тачки. У сљедећој теореми доказујемо да је диференцијабилност функције довољан услов за непрекидност функције у тачки.

Теорема 3.11. *Нека је функција* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *диференцијабилна у тачки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. *Тада вриједи:*

1) *Функција* f *је непрекидна у тачки* a.

2) *Постоје парцијални изводи* $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, $k = 1, \dots, n$ *и диференцијал* $df(a)$ *у тачки а је*

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\Delta x_n. \tag{3.7}$$

Доказ: 1) Из дефиниције диференцијабилности функције слиједи да је

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} (L_1 \Delta x_1 + L_2 \Delta x_2 + \cdots + L_n \Delta x_n + \beta(\Delta x)|\Delta x|) = 0,$$

па је функција непрекидна у тачки a.

2) Ако у (3.6) ставимо редом $\Delta x_i = 0$, $i \neq k$ добијамо

$$f(a_1, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n) = L_k \Delta x_k + \beta(\Delta x_k)\Delta x_k.$$

Одавде добијамо

$$\frac{f(a_1, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{\Delta x_k} = L_k + \beta(\Delta x_k) \Rightarrow$$

$$L_k = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + \Delta x_k, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_k, \dots, a_n)}{\Delta x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \ \ k = 1,2, \dots, n. \square$$

Ако у формули (3.7) умјесто фиксиране тачке a узмемо произвољну тачку $x \in D$, тада се диференцијал функције $u = f(x)$ у тачки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ може записати у облику

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \tag{3.8}$$

Ако у (3.8) ставимо редом $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_k$, добијамо $dx_k = \Delta x_k$, $k = 1,2, \dots, n$, па је диференцијал функције $u = f(x)$ облика

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n. \tag{3.9}$$

Из (3.9) за функцију двије промјенљиве $z = f(x, y)$ добијамо диференцијал у облику

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.10}$$

а за функцију три промјенљиве $u = f(x, y, z)$ у облику

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{3.11}$$

С обзиром да из егзистенције парцијалних извода у тачки не слиједи непрекидност функције у тој тачки, те да из диференцијабилности функције у тачки слиједи непрекидност функције у тој тачки, можемо закључити да егзистенција парцијалних извода у тачки не имплицира диференцијабилност функције у тој тачки. Сљедећи примјер потврђује претходни закључак.

Примјер 3.18. Функција $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

има парцијалне изводе у тачки $(0,0)$, али у тој тачки није диференцијабилна. [2]

Из претходног примјера видимо да само постојање парцијалних извода у тачки није довољно за диференцијабилност функције у тој тачки. Међутим, уколико су парцијални изводи још и непрекидни, онда је функција диференцијабилна у тој тачки. Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.12. *Ако функција $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ има парцијалне изводе по свим промјенљивим у околини тачке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ и ако су ти изводи непрекидни у тачки a, тада је функција f диференцијабилна у тој тачки.*

Ова теорема омогућава испитивање диференцијабилности функције помоћу непрекидности парцијалних извода што је обично једноставније него испитивање на основу дефиниције. Међутим, услов непрекидности парцијалних извода јесте довољан, али није и потребан за диференцијабилност функције. Тако нпр. парцијални изводи функције

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

имају прекид у $(0,0)$, али је функција у тој тачки диференцијабилна (Видјети Примјер 3.19).

[2] За доказ видјети Биљана Војводић и Владимир Владићић, *Математика II*

Парцијалне изводе сложене функције одређујемо помоћу сљедеће теореме.

Теорема 3.13. *Нека су функције* $\varphi_i: T \to \mathbb{R}, T \subset \mathbb{R}^k$ $i = 1,2, \ldots n$ *диференцијабилне у некој околини тачке* $t_0 = \left(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_k^0\right) \in T$ *и нека је функција* $f: D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ *диференцијабилна у тачки* $a = \left(\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)\right)$. *Тада је сложена функција* $u = f\left(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\right)$ *диференцијабилна у тачки* t_0 *и вриједи*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}(t_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(a)\frac{\partial x_1}{\partial t_i}(t_0) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(a)\frac{\partial x_2}{\partial t_i}(t_0) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(a)\frac{\partial x_n}{\partial t_i}(t_0) \tag{3.12}$$

гдје је $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $i = 1,2, \ldots k$.

Примјер 3.20. а) Нека је $z = x^2 + cosy$, $x = t^4 + 1$, $y = 2t^3 - 1$. Тада је

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x \cdot 4t^3 - siny \cdot 6t^2 = 8t^3(t^4 + 1) - 6t^2 sin(2t^3 - 1).$$

б) Нека је $z = x^2y^3$, $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$. Тада је

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = 2xy^3 \cdot v + 3x^2y^2 \cdot \frac{1}{v} = 2uv\left(\frac{u}{v}\right)^3 \cdot v + 3u^2v^2\left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{1}{v} = \frac{5u^4}{v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = 2xy^3 \cdot u + 3x^2y^2 \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = 2uv\left(\frac{u}{v}\right)^3 \cdot u + 3u^2v^2\left(\frac{u}{v}\right)^2\left(-\frac{u}{v^2}\right) = -\frac{u^5}{v^2}. \ \Diamond$$

3.6. ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ПАРЦИЈАЛНИХ ИЗВОДА И ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТИ

Геометријску интерпретацију појмова парцијалних извода и диференцијабилности дајемо за функцију двије промјенљиве $z = f(x, y)$ која је дефинисана на отвореном скупу $D \subset \mathbb{R}^2$. Претпостављамо да је графиком функције $z = f(x, y)$ одређена површ

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

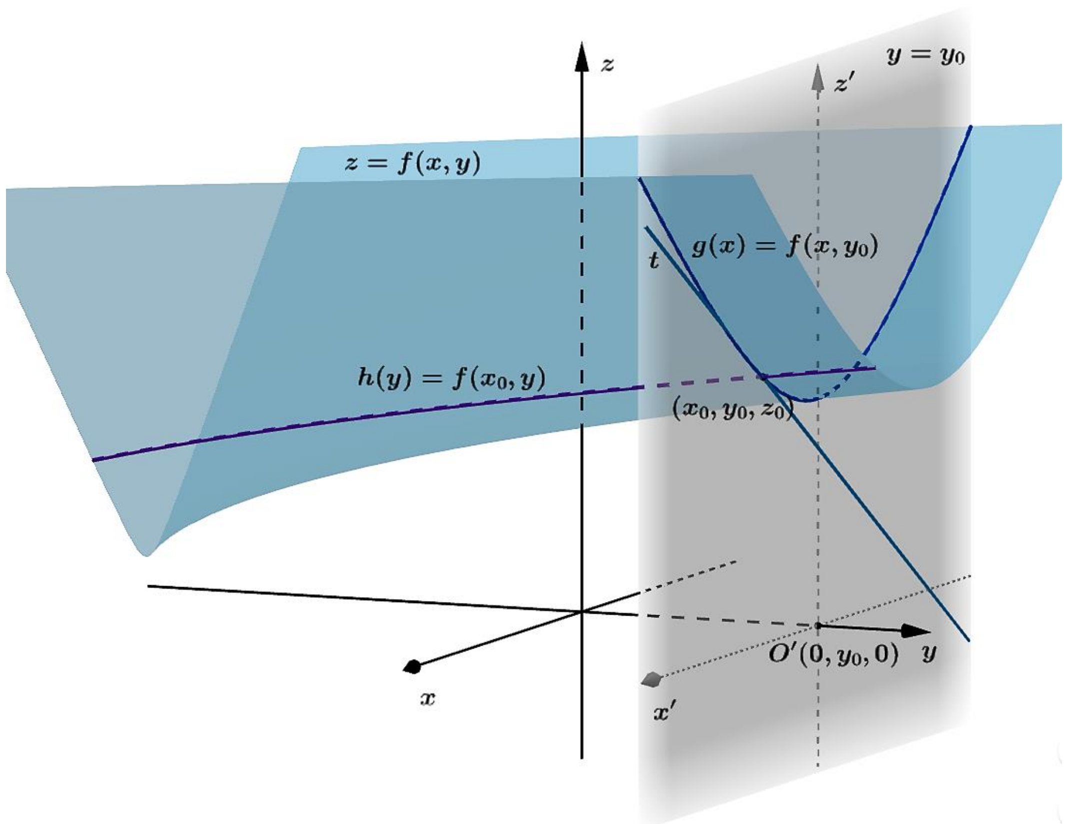
Нека у тачки $(x_0, y_0) \in D$ постоји парцијални извод $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$. Из геометријског тумачења извода функције једне промјенљиве $y = f(x)$ знамо да $f'(x_0)$ представља коефицијент правца тангенте на график функције у тачки $(x_0, f(x_0))$, тј. $f'(x_0) = tg\varphi$, гдје је φ угао који тангента образује са x −осом.

Уочимо да је пресјек површи S и равни $y = y_0$ (раван паралелна xOz равни која пролази кроз тачку y_0 на y −оси), крива $g(x) = f(x, y_0)$, Слика 3.4.

Функција $g(x)$ је функција једне промјенљиве и можемо посматрати њен график који лежи у равни $y = y_0$ у односу на координанти систем чији је координатни почетак тачка $O'(0, y_0, 0)$ са координатним осама Ox' и Oz' које су паралелне координатним осама Ox и Oz. Јасно је да је извод функције g заправо парцијални извод функције f по x, тј. $g'(x) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y_0)$, па је

$$g'(x_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\alpha,$$

гдје је α угао који тангента на график функције $g(x) = f(x, y_0)$ образује са Ox', односно са x −осом.



Слика 3.4

Дакле, парцијални извод $\frac{\partial z}{\partial x}$ у тачки (x_0, y_0) представља коефицијент правца тангенте на график функције $z = f(x, y_0)$ у тачки (x_0, y_0). На исти начин добијамо да парцијални извод $\frac{\partial z}{\partial y}$ у тачки (x_0, y_0) представља коефицијент правца тангенте на график функције $z = f(x_0, y)$ у тачки (x_0, y_0).

Нека је сада функција $z = f(x, y)$ диференцијабилна у тачки (x_0, y_0). Тада је тотални диференцијал функције f у тој тачки облика

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

гдје $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ за $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$. Ако уврстимо

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \; z_0 = f(x_0, y_0)$$

и означимо

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ и } B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

добијамо

$$f(x, y) = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \beta(x - x_0, y - y_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

гдје $\beta(x - x_0, y - y_0) \to 0$ за $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Посматрајмо раван дату једначином

$$z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0) \tag{3.13}$$

која пролази кроз тачку (x_0, y_0, z_0). Добијамо

$$f(x, y) - (z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)) \to 0 \text{ за } (x, y) \to (x_0, y_0)$$

па се раван (3.13) назива **тангентна раван површи** S у тачки (x_0, y_0, z_0).

Из (3.13) добијамо једначину тангентне равни у тачки (x_0, y_0, z_0), $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \tag{3.14}$$

Ако је површ S дата једначином $F(x,y,z)=0$ и ако је у тачки (x_0,y_0,z_0) бар један од парцијалних извода различит од нула, нпр. $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, онда из формуле (3.12) диференцирањем по x, односно по y, добијамо

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

тј.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Сада уврштавањем у (3.13) добијамо једначину тангентне равни за површ дату једначином $F(x,y,z)=0$:

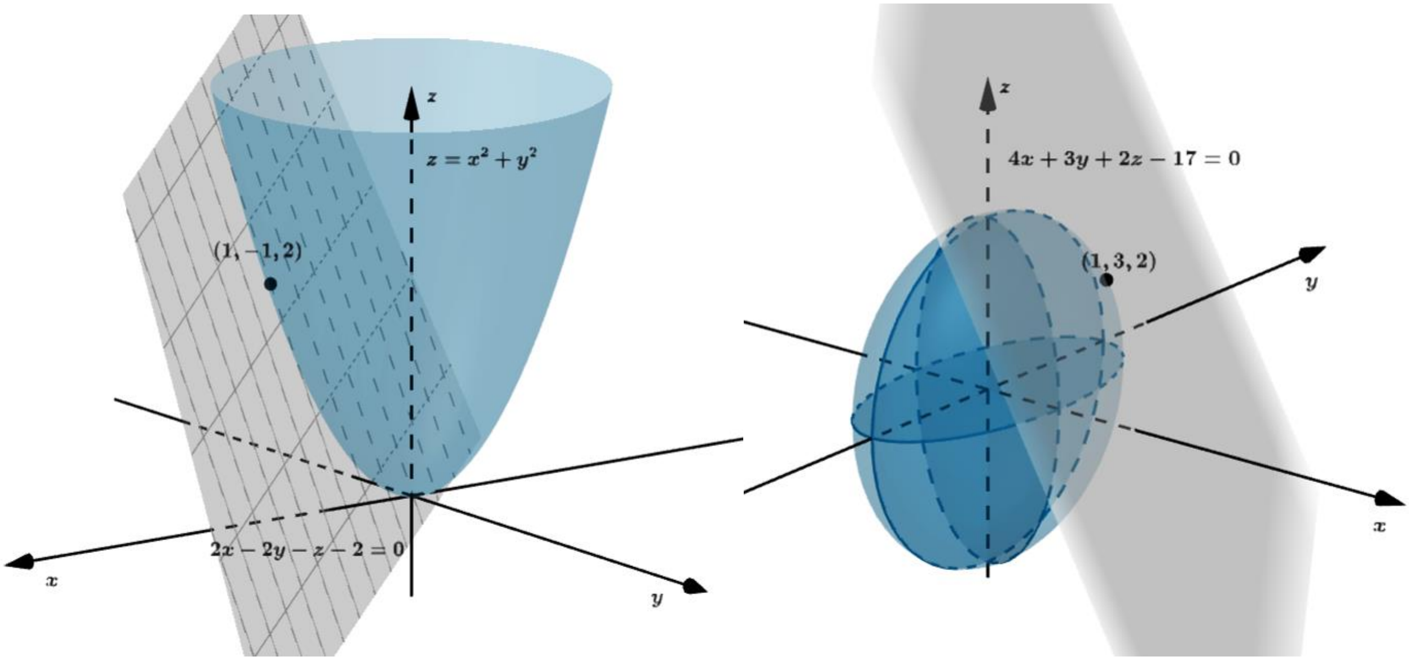
$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \tag{3.15}$$

Примјер 3.21. а) За једначину тангентне равни параболоида $z=x^2+y^2$ у тачки $(1,-1,z_0)$, Слика 3.5 а) имамо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=2 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2y\ \Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-2$$

и $z_0=z(1,-1)=2$. Користећи формулу (3.14) добијамо

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0\Rightarrow 2x-2y-z-2=0.$$



а)   б)

Слика 3.5

б) За одређивање једначине тангентне равни елипсоида $4x^2 + y^2 + z^2 = 17$ у тачки $(1,3,2)$ (Слика 3.5 б)) користимо формулу (3.15). Имамо $F(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 17 = 0$, па је

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,3,2) = 8, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,3,2) = 6, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(1,3,2) = 4.$$

Једначина тангентне равни гласи

$$8(x-1) + 6(y-3) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow 4x + 3y + 2z - 17 = 0. \ \lozenge$$

3.7. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ВИШЕГ РЕДА

Ако функција $f: D \to \mathbb{R},\ D \subset\ \mathbb{R}^n$ има парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1,2, \dots, n$ у свим тачкама скупа D, они су такође функције n промјенљивих, $\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \to \mathbb{R},\ i = 1,2, \dots, n.$ За њих користимо термин **парцијални изводи првог реда**. Уколико функција $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ има парцијални извод по x_j у некој тачки $a \in D$, онда се тај парцијални извод назива **парцијални извод другог реда функције f у тачки a по промјенљивим x_i и x_j** и означава се са

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = f''_{x_i x_j}(a).$$

Ако је $i = j$ пишемо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(a) = f''_{x_i^2}(a).$$

Парцијални изводи

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},\ \ i\ \neq j$$

називају се **мјешовити парцијални изводи.**

Примјер 3.22. Израчунати парцијалне изводе другог реда функције

$$u = f(x, y, z) = (x + y^2)e^{xz}.$$

Рјешење:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x=(1+xz+y^2z)e^{xz},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=u'_y=2ye^{xz},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=u'_z=x(x+y^2)e^{xz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{x^2}=(2z+xz^2+y^2z^2)e^{xz},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=u''_{xy}=u''_{yx}=2yze^{xz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=u''_{xz}=u''_{zx}=(2x+y^2+x^2z+xz+xy^2z)e^{xz},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{y^2}=2e^{xz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=u''_{yz}=u''_{zy}=2xye^{xz},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=u''_{z^2}=x^2(x+y^2)e^{xz}.\quad \lozenge$$

У претходном примјеру мјешовити изводи су били једнаки. Међутим, то не вриједи у општем случају што илуструје сљедећи примјер.

Примјер 3.23. За функцију

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

је

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),\quad (x,y)\neq(0,0),\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

па је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1.$$

Даље је

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right), \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

па је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \quad \lozenge$$

Дакле, мјешовити парцијални изводи другог реда не морају бити једнаки и зато разматрамо услове под којима вриједи једнакост ових извода. Показује се да је непрекидност мјешовитих парцијалних извода довољан услов за њихову једнакост.

Теорема 3.14. *Ако функција $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ има у некој околини тачке $(x_0, y_0) \in D$ мјешовите парцијалне изводе $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ који су непрекидни у тачки (x_0, y_0), тада у тој тачки вриједи*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Парцијалне изводе трећег реда дефинишемо аналогно парцијалним изводима другог реда.

Ако је $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}: D \to \mathbb{R}, \quad i,j = 1,2,\dots,n$ и ако постоји извод ове функције по промјенљивој x_k у тачки $a \in D$, онда се тај парцијални извод назива **парцијални извод трећег реда функције f у тачки a по промјенљивим x_i, x_j и x_k** и означава се са

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) = f'''_{x_i x_j x_k}(a).$$

На сличан начин се дефинишу изводи вишег реда. Ако функцију $z = f(x,y)$ диференцирамо прво по x p пута и затим по y $(n-p)$ пута, добијени $n-$ти парцијални извод функције f означавамо са

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}} = \frac{\partial^n f}{\partial x^p \partial y^{n-p}}.$$

За функцију $f: D \to \mathbb{R}, \ D \subset \mathbb{R}^n$ која у некој тачки из D или на неком скупу који је подскуп скупа D има непрекидне све парцијалне изводе првог реда, кажемо да је **непрекидно диференцијабилна у тој тачки или на том скупу.**

Аналогно, за функцију која у некој тачки из D или на неком скупу који је подскуп скупа D има непрекидне све парцијалне изводе закључно са редом m, кажемо да је **m пута непрекидно диференцијабилна у тој тачки или на том скупу.**

Да би функција била m пута непрекидно диференцијабилна довољно је да у тој тачки или на том скупу има непрекидне парцијалне изводе реда m.

Одредимо сада диференцијал другог реда за функцију $z = f(x, y)$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ која има непрекидне парцијалне изводе другог реда на D. Из формуле (3.10) имамо

$$d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right)dy + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Из непрекидности парцијалних извода другог реда на скупу D имамо да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

па добијамо

$$d(dz) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

За диференцијал другог реда користимо ознаку $\boldsymbol{d^2 z}$.

Према томе, **диференцијал другог реда** функције $z = f(x, y)$ је

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \tag{3.16}$$

Сада се из d^2z на исти начин добија и **диференцијал трећег реда** као $d(d^2z)$:

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

На исти начин за диференцијал m −тог реда, $m = 1,2, \ldots$, добијамо да вриједи

$$d^mz = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k} dx^{m-k}dy^k.$$

Сада одређујемо диференцијал другог реда за функцију $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, која има непрекидне парцијалне изводе другог реда на скупу D. Полазећи од формуле (3.11) добијамо

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz \qquad (3.17)$$

и аналогно као код функције двије промјенљиве одређујемо диференцијал трећег и вишег реда. На исти начин одређујемо диференцијале вишег реда за функције n промјенљивих, $n \geq 4$.

Примјер 3.25. Наћи диференцијале првог и другог реда функције $u(x,y,z) = x^3 \ln y + e^{y^2z}$.

Рјешење: Имамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = 3x^2 \ln y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = \frac{x^3}{y} + 2yze^{y^2z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = y^2e^{y^2z}.$$

Из формуле (3.11) добијамо

$$du = 3x^2 \ln y dx + \left(\frac{x^3}{y} + 2yze^{y^2 z}\right) dy + y^2 e^{y^2 z} dz.$$

Даље је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx} = 6x \ln y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u''_{yx} = \frac{3x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = u''_{xz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = u''_{zx} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy} = -\frac{x^3}{y^2} + 2ze^{y^2 z} + 4y^2 z^2 e^{y^2 z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = u''_{yz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = u''_{zy} = 2ye^{y^2 z} + 2y^3 z e^{y^2 z} = 2ye^{y^2 z}(1 + y^2 z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u''_{zz} = y^4 e^{y^2 z}.$$

Из формуле (3.17) добијамо

$$d^2 u = 6x \ln y dx^2 + \left(2ze^{y^2 z}(1 + 2y^2 z) - \frac{x^3}{y^2}\right) dy^2 + y^4 e^{y^2 z} dz^2 + \frac{6x^2}{y} dx dy + 4ye^{y^2 z}(1 + y^2 z) dy dz. \lozenge$$

3.8. ТЕЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Познато је да за функцију f једне промјенљиве која има коначне изводе до реда $m+1$ у некој околини тачке x_0, у тој околини вриједи **Тејлорова формула**

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+$$
$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+R_m(x-x_0)$$

гдје је

$$R_m(x-x_0)=\frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$$

остатак у Тејлоровој формули, при чему је c тачка која се налази унутар сегмента са крајњим тачкама x_0 и x. Ако је $x_0=0$ онда ову формулу називамо **Маклоренова формула**.

Полином m −тог степена

$$T_m(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

назива се **Тејлоров полином** функције $f(x)$ у околини тачке x_0.

Функције више промјенљивих се под одређеним условима такође могу апроксимирати Тејлоровим полиномом више промјенљивих. Вриједи сљедећа Тејлорова формула за функцију двије промјенљиве.

Теорема 3.15. (Тејлорова формула) *Нека је функција* $z = f(x,y)$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ $m+1$ *пута диференцијабилна у некој околини тачке* $(x_0, y_0) \in D$. *Тада за сваку тачку* (x,y) *из те околине вриједи Тејлорова формула*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right) +$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) +$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}(x-x_0)^{m-k}(y-y_0)^k + R_m(x-x_0, y-y_0) \qquad (3.18)$$

гдје је остатак R_m *облика*

$$R_m(x-x_0, y-y_0) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{\partial^{m+1} f(x_1,y_1)}{\partial x^{m+1-k}\partial y^k}(x-x_0)^{m+1-k}(y-y_0)^k$$

за неку тачку (x_1, y_1) *из посматране околине*

Уколико је $(x_0, y_0) = (0,0)$ онда кажемо да је формула (3.18) **Маклоренова формула.**

Израз

$$T_m(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right)+$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+\cdots+$$
$$\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k}\partial y^k}(x-x_0)^{m-k}(y-y_0)^k$$

се назива **Тејлоров полином** степена m за функцију f у тачки (x_0,y_0).

Ако су **парцијални изводи ограничени**, тада остатак $R_m(x-x_0,y-y_0)$ тежи нули за $m\to\infty$, што омогућава апроксимацију функције са произвољном тачношћу. Пошто су парцијални изводи елементарних функција ограничени у околини тачке (x_0,y_0), Тејлорова формула омогућава рачунање вриједности ових функција са произвољном тачношћу што има велику практичну примјену.

Примјер 3.26. Разложити функцију $f(x,y)=\frac{x}{y}$ у околини тачке $(1,-1)$ помоћу Тејлорове формуле са члановима трећег реда закључно.

Рјешење:

$$\frac{x}{y}=-1-(x-1)-(y+1)-(x-1)(y+1)-(y+1)^2-$$
$$\frac{1}{3}(x-1)(y+1)^2-(y+1)^3+R_3(x-1,y+1).$$

3.9. ЕКСТРЕМИ ФУНКЦИЈА ВИШЕ ПРОМЈЕНЉИВИХ

3.9.1. Локални екстреми

Дефиниција 3.19. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. *Кажемо да функција* f *у тачки* a *има* ***локални максимум (локални минимум)*** *ако постоји нека околина тачке* a *таква да за све тачке* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *из те околине вриједи*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \big(f(x) \geq f(a)\big).$$

Ако у горњој дефиницији умјесто знака $\leq$ $(\geq)$ имамо знак строге неједнакости $<$ $(>)$, онда кажемо да функција f у тачки a има **строги локални максимум (строги локални минимум).**

Локалне максимуме и локалне минимуме једним именом зовемо **локалним екстремима.**

Локални екстреми нису везани за комплетан домен функције већ само за дио домена (околину локалног екстрема) и не морају представљати највећу и најмању вриједност функције. Поред локалних екстрема постоје и **апсолутни или глобални екстреми.**

Дефиниција 3.20. *Нека је* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека је* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. *Кажемо да функција* f *у тачки* a *има* ***апсолутни максимум (апсолутни минимум)*** *ако за све тачке* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ *вриједи*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \big(f(x) \geq f(a)\big).$$

Уколико у горњој дефиницији умјесто знака $\leq$ $(\geq)$ имамо знак строге неједнакости $<$ $(>)$, онда кажемо да функција f у тачки a има **строги апсолутни максимум (строги апсолутни минимум).**

Тачке апсолутних екстрема су истовремено и тачке локалних екстрема док обрнуто не мора да вриједи. Вриједност функције у тачки апсолутног максимума је највећа вриједност функције, док је вриједност функције у тачки апсолутног минимума најмања вриједност функције на њеном домену.

Из дефиниције локалног екстрема добијамо да је за све тачке x из неке околине тачке a локалног максимума (минимума), испуњено

$$f(x) - f(a) \leq 0 \qquad (f(x) - f(a) \geq 0)$$

тј.

$$\Delta f(a) \leq 0 \qquad (\Delta f(a) \geq 0)$$

Одавде добијамо да функција f у тачки a има локални максимум (локални минимум) ако и само ако је њен тотални прираштај у некој околини тачке a непозитиван (ненегативан).

Циљ нам је да формулишемо потребне и довољне услове за постојање локалног екстрема у некој тачки. За почетак присјетимо се потребних услова за постојање локалног екстрема функције једне промјенљиве $f: (a, b) \to \mathbb{R}$. Уколико ова функција има локални екстрем у некој тачки $x_0 \in (a, b)$ у којој има извод, потребан услов за постојање екстрема је $f'(x_0) = 0$. Сличан резултат вриједи и за функције више промјенљивих.

Теорема 3.16. *Нека је* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ *тачка локалног екстрема функције* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *и нека функција* f *има у тачки* a *све парцијалне изводе првог реда. Тада је*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1,2, \dots, n.$$

Специјално, ако је функција f *диференцијабилна у тачки* a, *тада је* $df(a) = 0$.

Доказ: Претпоставимо без губљења на општости да је тачка a локални максимум функције f. Тада постоји околина тачке a таква да за све елементе x из те околине вриједи

$$f(x) \leq f(a).$$

Посматрајмо функције g_i дефинисане у некој околини тачака a_i, $i = 1,2, \dots n$, са

$$g_i(t) = f(a_1, \dots a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Функције g_i су функције једне промјенљиве које имају извод у тачки a_i која је и локални екстрем, па је $g_i'(a_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Пошто је $g_i'(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \dots, n$, теорема је доказана. □

Тачке $x = (x_1, \dots, x_n)$ за које вриједи

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

називају се **стационарне тачке**.

Примјер 3.27. Одредити стационарне тачке функције $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz.$$

Рјешење: Стационарне тачке су рјешења система једначина

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Имамо

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) + 2z = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 12y = 0 \ \wedge \ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2x.$$

Из друге једначине система добијамо $y = 0 \vee y = -4$. Из прве и треће једначине добијамо

$$x = 2, \qquad z = -1.$$

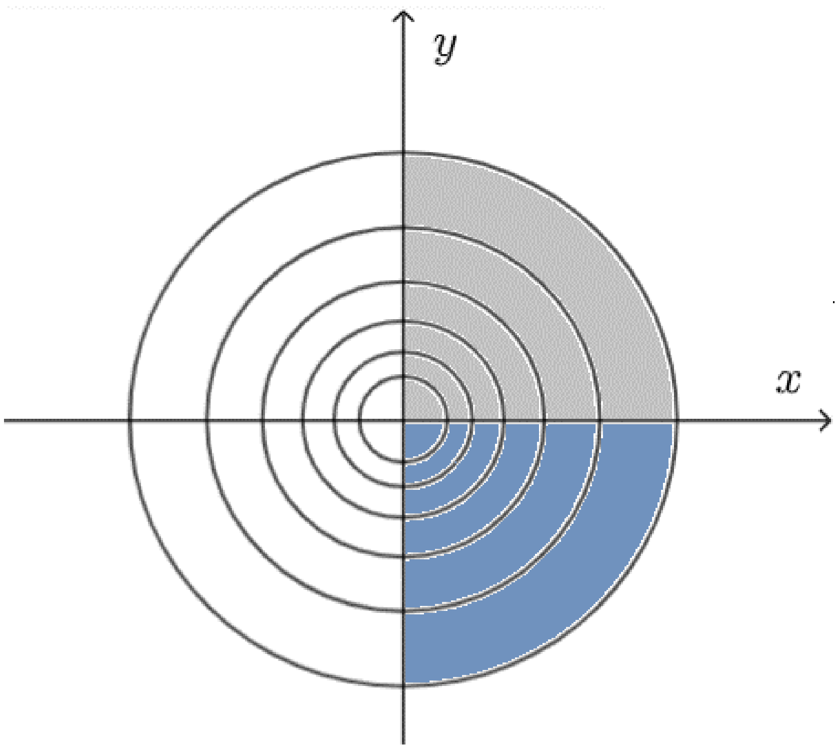
Дакле, функција има двије стационарне тачке $(2,0,-1)$ и $(2,-4,-1)$. ◊

Примједба 3.1. Ако је функција $f\colon D \to \mathbb{R}$ непрекидна на затвореном и ограниченом скупу D, онда на основу Вајерштрасове теореме (Теорема 3.6) закључујемо да постоје тачке скупа D у којима она постиже апсолутни максимум и апсолутни минимум. Апсолутни екстрем се може достизати у унутрашњој тачки скупа D или на његовој граници. Уколико се апсолутни екстрем достиже у унутрашњој тачки тада је на основу претходне теореме та тачка и стационарна тачка функције. Зато се за одређивање апосолутних екстрема посматрају стационарне тачке функције f које се налазе у унутрашњости скупа D, као и тачке локалног екстрема на граници скупа D.

Стационарне тачке су кандидати за тачке локалног екстрема, али не морају да буду тачке локалног екстрема.

Примјер 3.29. Одредити стационарне тачке функције $f(x, y) = xy$ и испитати да ли су те тачке уједно и тачке екстрема.

Рјешење: Рјешавајући систем једначина $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ добијамо $y = 0$, $x = 0$.



Слика 3.7

Дакле, функција f има једну стационарну тачку $(0,0)$ која је кандидат за локални екстрем функције. Међутим, лако се види да ова тачка није тачка локалног екстрема функције јер не постоји околина тачке $(0,0)$ у којој је тотални прираштај

$$\Delta f(0,0) = f(x, y) - f(0,0) = xy$$

сталног знака.

Наиме, за тачке из произвољне околине за које је $x > 0 \wedge y > 0$ имамо $\Delta f(0,0) = xy > 0$, док за тачке $x > 0 \wedge y < 0$ вриједи $\Delta f(0,0) = xy < 0$.

Пошто свака околина тачке $(0,0)$ садржи и тачке (x, y) такве да је $x > 0 \wedge y > 0$ и тачке (x, y) такве да је $x > 0 \wedge\ y < 0$ (Слика 3.7) закључујемо да тачка $(0,0)$ није тачка екстрема функције f. ◊

У наставку разматрамо природу стационарних тачака и довољне услове за постојање локалних екстрема у стационарним тачкама. За функције једне промјенљиве је познато да је стационарна тачка x_0 $(f'(x_0) = 0)$ тачка локалног минимума уколико је $f''(x_0) > 0$, односно локалног максимума уколико је $f''(x_0) < 0$. Диференцијал другог реда за функције више промјенљивих има у извјесном смислу исту улогу у формулисању довољних услова за тачке локалних екстрема као други извод функције једне промјенљиве. Да бисмо формулисали те услове, на почетку наводимо одређене појмове из линеарне алгебре.

❖ Квадратне форме

Нека је $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $a_{ij}, i, j = 1,2, \dots, n$ произвољни реални бројеви. Функција

$$\Phi(h) = \Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i h_j \tag{3.20}$$

зове се **квадратна форма.** Ако је је $a_{ij} = a_{ji}$ за све $i, j = 1,2, \dots, n$, кажемо да је квадратна форма **симетрична**.

Нека је $u = f(x_1, \dots, x_n)$ два пута непрекидно диференцијабилна на D. Тада је диференцијал другог реда симетрична квадратна форма промјенљивих dx_i са $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$:

$$d^2u = \Phi(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

За $n = 2$ и $z = f(x, y)$ имамо

$$d^2z = \Phi(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

док је за $n = 3$ и $u = f(x, y, z)$

$$d^2u = \Phi(dx, dy, dz) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dxdz + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dydz\right).$$

Матрица

$$A(\Phi) = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$$

зове се **матрица квадратне форме** Φ.

У случају диференцијала другог реда, матрица квадратне форме је

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{n\times n}$$

и назива се **Хесеова**[3] **матрица** функције f. Пошто претпостављамо да је функција f два пута непрекидно диференцијабилна на D, на основу Теореме 4.14 добијамо да су мјешовити парцијални изводи једнаки, па је квадратна форма, односно Хесеова матрица, симетрична.

[3] Ludwig Otto Hesse (1811 –1874), њемачки математичар

Дефиниција 3.21. *Кажемо да је квадратна форма (3.20)* ***позитивно (негативно) дефинитна*** *ако за све* $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,\dots 0)\}$ *вриједи*

$$\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) > 0 \qquad (\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) < 0).$$

Квадратна форма (3.20) је ***промјенљивог знака*** *ако постоје* $h = (h_1, \dots, h_n)$ *и* $k = (k_1, \dots, k_n)$ *такви да је* $\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) > 0$ и $\Phi(k_1, k_2, \dots, k_n) < 0$.

Ако у Дефиницији 3.21 умјесто знака строге неједнакости имамо знак $\geq$ $(\leq)$, тј. $\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) \geq 0 \quad (\Phi(h_1, h_2, \dots, h_n) \leq 0)$ за све $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, тада кажемо да је квадратна форма **позитивно (негативно) полудефинитна.**

Примјер 3.30. За квадратну форму

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 2{h_1}^2 + 2{h_2}^2 + {h_3}^2 - 2h_1h_2 + 2h_2h_3$$

имамо

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = (h_1 - h_2)^2 + (h_2 + h_3)^2 + {h_1}^2 \geq 0$$

Пошто је $\Phi(h_1, h_2, h_3) = 0 \Leftrightarrow h_1 - h_2 = 0 \wedge h_2 + h_3 \wedge h_1 = 0$ добијамо да је $\Phi(h_1, h_2, h_3) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Према томе, за свако $(h_1, h_2, h_3) \neq (0,0,0)$ добијамо $\Phi(h_1, h_2, h_3) > 0$ па је квадратна форма позитивно дефинитна. ◊

Примјер 3.31. За квадратну форму

$$\Phi(h_1, h_2) = {h_1}^2 + {h_2}^2 - 2h_1h_2$$

је

$$\Phi(h_1, h_2) = (h_1 - h_2)^2 \geq 0.$$

Пошто је $\Phi(h_1, h_2) = 0 \Leftrightarrow h_1 = h_2$, квадратна форма има вриједност нула и за неке $(h_1, h_2) \neq (0,0)$. Дакле, квадратна форма није позитивно дефинитна већ је позитивно полудефинитна. ◊

За испитивање дефинитности квадратне форме користимо **Силвестеров** [4] **критеријум**.

Теорема 3.17. (Силвестеров критеријум) *Нека је*

$$A(\Phi)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

симетрична матрица квадратне форме (3.20) и нека су

$$A_1=a_{11},\qquad A_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ldots,\quad A_n=detA(\Phi)$$

њени главни минори.

1) Да би квадратна форма (3.20) била позитивно дефинитна, потребно је и довољно да су сви главни минори матрице $A(\Phi)$ *позитивни, тј. да вриједи*

$$A_1>0,\quad A_2>0,\ldots,\ A_n>0. \qquad (3.21)$$

2) Да би квадратна форма (3.20) била негативно дефинитна потребно је и довољно да главни минори матрице $A(\Phi)$ *наизмјенично мијењају знак, при чему је* $A_1<0$, *односно да вриједи*

$$A_1<0,\quad A_2>0,\quad A_3<0,\ldots,(-1)^nA_n>0. \qquad (3.22)$$

3) Ако је $A_i\neq 0,\quad i=1,2,\ldots,n$ *и не вриједи ниједан од услова (3.21) и (3.22), тада квадратна форма није ни позитивно полудефинитна ни негативно полудефинитна.*

[4] J. J. Sylvester (1814-1897), енглески математичар

Примјер 3.32. Квадратна форма из примјера 3.30 има матрицу

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пошто је

$$A_1 = 2 > 0, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \qquad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

квадратна форма је позитивно дефинитна.

Квадратна форма из Примјера 3.31 има матрицу

$$A(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

па је $A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, и квадратна форма није ни позитивно ни негативно дефинитна. У Примјеру 3.31 смо видјели да је посматрана квадратна форма позитивно полудефинитна. ◊

❖ Довољни услови локалног екстрема

Сада формулишемо теорему која даје довољне услове за постојање локалног екстрема у стационарној тачки функције у зависности од знака диференцијала другог реда функције.

Теорема 3.18. *Нека је функција* $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ *два пута непрекидно диференцијабилна у некој околини стационарне тачке* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. *Ако је симетрична квадратна форма*

$$\Phi(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i dx_j$$

позитивно (негативно) дефинитна, онда је a *тачка строгог локалног минимума (максимума). Ако је та форма промјенљивог знака, онда тачка* a *није тачка локалног екстрема функције* f.

Коришћењем претходне теореме и Силвестеровог критеријума лако се доказује теорема о довољним условима за постојање локалног екстрема у стационарној тачки за функцију двије промјенљиве.

Теорема 3.19. *Нека је функција* $z = f(x, y)$, $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *два пута непрекидно диференцијабилна у некој околини стационарне тачке* $(x_0, y_0) \in D$. *Нека је*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \qquad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Тада:

1) *ако је* $A > 0 \wedge AC - B^2 > 0$, *функција* f *има локални минимум у тачки* (x_0, y_0),
2) *ако је* $A < 0 \wedge AC - B^2 > 0$, *функција* f *има локални максимум у тачки* (x_0, y_0),
3) *ако је* $AC - B^2 < 0$, *функција* f *нема локални екстрем у тачки* (x_0, y_0).

Примједба 3.3. Уколико је $AC - B^2 = 0$, тачка (x_0, y_0) може али не мора да буде тачка екстрема. У том случају природу стационарне тачке испитујемо нпр. помоћу знака тоталног прираштаја у околини тачке (x_0, y_0).

Примјер 3.33. Одредити локалне екстреме функције $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Рјешење: Рјешење система

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0$$

су стационарне тачке: $P_1(1,2)$, $P_2(2,1)$, $P_3(-1,-2)$ и $P_4(-2,-1)$.
Даље је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y.$$

У тачки $P_1(1,2)$ је $A = 6$, $B = 12$, $C = 6$ па је

$$AC - B^2 = -108 < 0$$

и функција нема екстрем у тачки P_1.

У тачки $P_2(2,1)$ је $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$. Дакле,

$$A = 12 > 0, \qquad AC - B^2 = 108 > 0$$

па функција има минимум у тачки P_2

$$f_{min} = f(2,1) = -28.$$

У тачки $P_3(-1,-2)$ је $A=-6,\ \ B=-12,\ \ C=-6$ и

$$AC-B^2=-108<0$$

па функција нема екстрем у тачки P_3.

У тачки $P_4(-2,-1)$ имамо $A=-12,\ \ B=-6,\ \ C=-12,$ тј.

$$A=-12<0, \qquad AC-B^2=108>0$$

па функција има максимум у тачки P_4

$$f_{max}=f(-2,-1)=28. \lozenge$$

Примјер 3.34. Одредити локалне екстреме функције $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$u(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+12xy+2z.$$

Рјешење: Рјешавањем система

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0.$$

добијамо двије стационарне тачке: $P_1(24,-144,-1)$ и $P_2(0,0,-1)$.

Даље је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=12, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=0.$$

У тачки P_1 је

$$a_{11}=u''_{x^2}(24,-144,-1)=144, \quad a_{12}=12, \quad a_{13}=0, \quad a_{22}=2, \quad a_{23}=0, \quad a_{33}=2$$

па је

$$A_1 = 144 > 0,\ A_2 = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0,\ A_3 = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$$

и квадратна форма је позитивно дефинитна. Дакле, функција у тачки P_1 има локални минимум

$$u_{min} = u(24, -144, -1).$$

У тачки P_2 је

$$A_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0,-1) = 0$$

па квадратна форма није ни позитивно ни негативно дефинитна (Силвестеров критеријум). Квадратна форма у тачки P_2 је облика

$$d^2u = \Phi(dx, dy, dz) = 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy.$$

Покажимо да је ова квадратна форма промјенљивог знака.

Ако узмемо $dx = dy > 0,\ dz = 0$, тада је

$$d^2u = \Phi(dx, dy, dz) = 26dy^2 > 0.$$

Ако узмемо $dx = -dy > 0, dz = 0$ тада је

$$d^2u = \Phi(dx, dy, dz) = -22dy^2 < 0.$$

Дакле, квадратна форма је промјенљивог знака, па функција нема екстрем у тачки P_2. ◊

3.9.2. Условни екстреми

Поред одређивања локалних екстрема, код функција више промјенљивих често се јављају проблеми одређивања екстрема функције код које се аргументи не могу слободно мијењати на скупу дефинисаности функције већ су везани неким додатним релацијама.

Примјер 3.36. Нека је дата функција $f(x,y)=x^2+y^2$. Одредити најмању вриједност функције уз услов $x+y=1$.

Рјешење: Из услова $x+y=1$ добијамо $y=1-x$, па увршташавањем у функцију $f(x,y)$ добијамо функцију једне промјенљиве

$$g(x)=f(x,1-x)=2x^2-2x+1.$$

Функција g има минимум у тачки $x=\frac{1}{2}$, односно функција f има минимум у тачки $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,

$$f_{min}=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Уочимо да сама функција f у околини тачке P има мањих вриједности од $\frac{1}{2}$, али у тачки P функција има минимум под условом да је $x+y=1$.

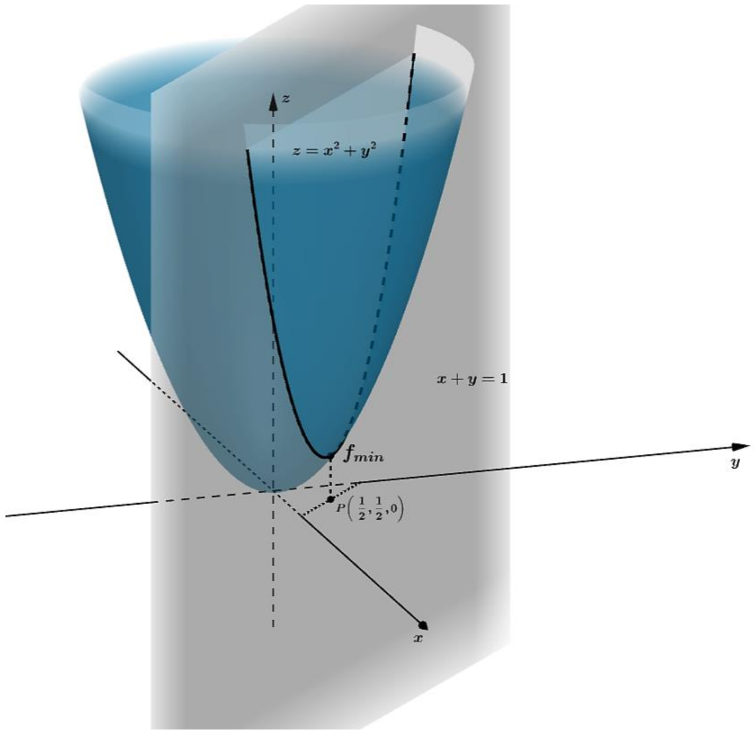
У овом примјеру смо одређивали најмању вриједност функције у тачкама које се налазе у равни $x+y=1$, односно тачку минимума на кривој која се добија као пресјек параболоида

$$z=x^2+y^2$$

и равни

$$x+y=1,$$

Слика 3.8. ◊



Слика 3.8

Нека је дата функција $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ и нека су дате функције $\varphi_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, s$, гдје је s природан број мањи од n. Означимо са B скуп

$$B = \{x : \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1,2, \dots, s\}.$$

Једначине

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1,2, \dots, s \qquad (3.23)$$

се називају **једначине везе.**

У Примјеру 3.36 једначина везе је

$$\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Дефиниција 3.22. *Кажемо да функција $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ у тачки $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$ има* ***условни максимум у односу на једначине везе (3.23)*** *ако постоји околина тачке a таква да за све $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из пресјека те околине и скупа B вриједи*

$$f(x) \leq f(a).$$

Аналогно се дефинише ***условни минимум у односу на једначине везе (3.23).***

Условне екстреме можемо одређивати тако да из система

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1,2, \dots, s,$$

изразимо s промјенљивих помоћу преосталих $n - s$ промјенљивих. Нпр. ако су то промјенљиве $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ имали бисмо:

$$x_1 = \psi_1(x_{s+1}, \dots, x_n), \quad x_2 = \psi_2(x_{s+1}, \dots, x_n), \quad \cdots, \quad x_s = \psi_s(x_{s+1}, \dots, x_n).$$

Замјеном ових промјенљивих у функцији $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ добија се

$$f = f(\psi_1(x_{s+1}, \dots, x_n), \dots, \psi_s(x_{s+1}, \dots, x_n), x_{s+1}, \dots, x_n) = g(x_{s+1}, \dots, x_n),$$

па се проблем одређивања условног екстрема своди на одређивање локалног екстрема функције $n - s$ промјенљивих. Овај приступ смо користили у Примјеру 3.36.

Недостатак описаног метода одређивања условних екстрема је у томе што се из система $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \ i = 1,2, \dots, s$ најчешће не могу изразити промјенљиве $x_1, \dots, x_s$. Овај недостатак се отклања примјеном метода **Лагранжових множитеља.**

Коришћењем Лагранжовог метода одређивање условних екстрема функције f у односу на једначине везе (3.23) се своди на одређивање локалних екстрема **Лагранжове функције**

$$F(x) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_s \varphi_s(x) \tag{3.24}$$

која зависи од промјенљивих $x_1, x_2, \dots, x_n$ али и од величина $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ које називамо **Лагранжовим множитељима.**

Дакле, приликом одређивања потенцијалних тачака условног екстрема, треба наћи стационарне тачке Лагранжове функције F, тј. рјешење система од $n+s$ једначина са непознатим $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = \varphi_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Нека је $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ стационарна тачка функције F за вриједности множитеља $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Преостаје нам да одредимо довољне услове да би стационарна тачка била тачка екстрема. У ту сврху испитујемо знак квадратне форме $d^2F(a) = \Phi(dx_1, \ldots, dx_n)$ при чему имамо у виду да промјенљиве $dx_1, \ldots, dx_n$ нису независне као што то нису ни промјенљиве $x_1, \ldots, x_n$. Из једначина везе (3.23) добијамо везу између $dx_1, \ldots, dx_n$:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} dx_n = 0, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{3.25}$$

Вриједи сљедећа теорема.

Теорема 3.20. *Нека је* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *стационарна тачка Лагранжове функције (3.24) која задовољава функције везе (3.23). Ако је* $d^2F(a) = \Phi(dx_1, \ldots, dx_n)$ *позитивно (негативно) дефинитна квадратна форма промјенљивих* $dx_1, \ldots, dx_n$ *које задовољавају услове (3.25) у тачки* a*, онда је тачка* a *тачка условног минимума (максимума) функције* f *у односу на једначине везе (3.23). Ако је квадратна форма* $d^2F(a)$ *промјенљивог знака, онда тачка* a *није тачка условног екстрема функције* f *у односу на једначине везе (3.23).*

У неким случајевима знак квадратне форме $d^2F(a) = \Phi(dx_1, \dots, dx_n)$ не зависи од једначина везе (3.23). Тада тако одређен знак квадратне форме важи и за вриједности $dx_1, \dots, dx_n$ које задовољавају услов (3.25).

Примјер 3.37. Урадити задатак из Примјера 3.36 помоћу Лагранжове функције.

Рјешење: Функција везе је $\varphi(x, y) = x + y - 1$, $s = 1$. Посматрамо Лагранжову функцију

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Из прве и друге једначине система

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0$$

добијамо $x = y = -\frac{\lambda}{2}$ и уврштавањем у трећу једначину добијамо $\lambda = -1$. Дакле, стационарна тачка функције $F(x, y, \lambda)$ је тачка $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$. Даље је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,$$

тј.

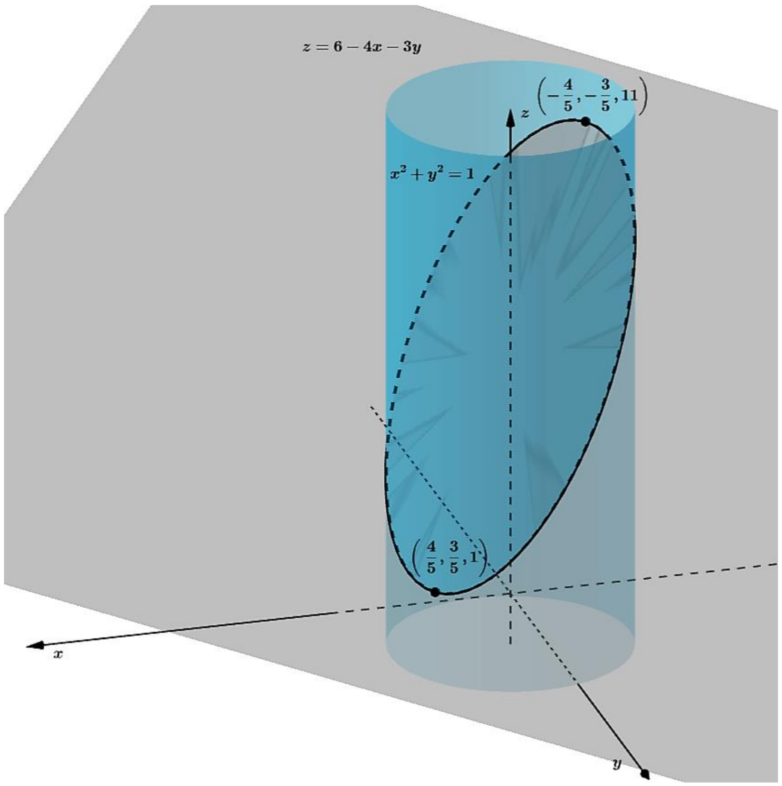
$$d^2F = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Из функције везе добијамо $dx = -dy$ па је

$$\Phi(dy) = 2dx^2 + 2dy^2 = 4dy^2 > 0.$$

Дакле, функција има минимум у тачки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ уз услов $x + y - 1 = 0$. Уочимо да у овом примјеру нисмо морали тражити везу између dx и dy из једначине везе, јер је знак квадратне форме d^2F био одређен и без тога, $d^2F = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$. ◊

Примјер 3.38. Одредити екстреме функције $z = 6 - 4x - 3y$ ако је $x^2 + y^2 = 1$.



Слика 3.9.

Рјешење: Овај задатак се геометријски своди на тражење највеће и најмање вриједности апликате тачака равни

$$z = 6 - 4x - 3y$$

које припадају и цилиндру

$$x^2 + y^2 = 1,$$

Слика 3.9. Одређујемо стационарне тачке Лагранжове функције

$$F(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$$

гдје је

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Имамо

$$F(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y \ + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Добијамо систем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Изражавајући x и y из прве и друге једначине система респективно, и затим уврштавајући у трећу једначину добијамо

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2=1 \Rightarrow \lambda^2=\frac{25}{4} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{5}{2}.$$

Добијамо двије стационарне тачке:

$$A\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right) \quad \text{за} \quad \lambda=\frac{5}{2} \quad \text{и} \quad B\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right) \quad \text{за} \quad \lambda=-\frac{5}{2}.$$

Даље је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda \ \wedge \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda \ \wedge \ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=0 \Rightarrow d^2F=2\lambda dx^2+2\lambda dy^2.$$

За тачку $A\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ и $\lambda=\frac{5}{2}$ имамо

$$d^2F=5dx^2+5dy^2>0$$

па у тачки $A\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ функција има условни минимум

$$z_{min}=z\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)=1.$$

За тачку $B\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ и $\lambda=-\frac{5}{2}$ имамо

$$d^2F=-5dx^2-5dy^2<0$$

па у тачки $B\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ функција има условни максимум

$$z_{max}=z\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=11. \quad \lozenge$$

Примјер 3.40. Одредити апсолутне екстреме функције

$$u(x,y,z)=x+y+z$$

на скупу

$$x^2+y^2\leq z\leq 1.$$

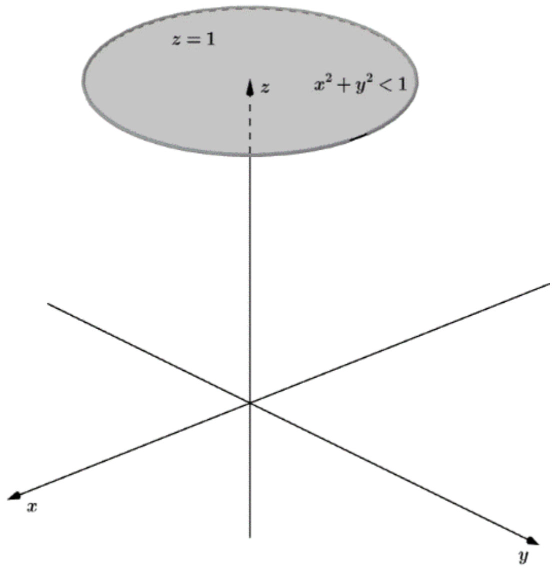
Рјешење: Пошто непрекидна функција на ограниченом и затвореном скупу достиже своју најмању и највећу вриједност, треба да одредимо локалне екстреме у унутрашњости, а затим условне екстреме на граници скупа.[5] Поредећи вриједности функције у тачкама локалних и условних екстрема, долазимо да апсолутних екстрема функције на том скупу.

1) На почетку одређујемо локалне екстреме функције у унутрашњости, тј. у тачкама скупа за које је $x^2+y^2<z<1$. Пошто је

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1$$

функција нема стационарних тачака. То значи да се најмања и највећа вриједност функције достижу на граници скупа.

[5] Видјети Примједбу 3.1



Слика 3.10 а)

2) Одређујемо екстреме функције под условом

$$z = 1, \qquad x^2 + y^2 < 1,$$

тј. у унутрашњости круга $x^2 + y^2 < 1$ у равни $z = 1$, Слика 3.10 а). Тада је

$$g(x, y) = u(x, y, 1) = x + y + 1, \;\; x^2 + y^2 < 1$$

па функција g нема стацонарних тачака, тј. функција u нема тачака екстрема под датим условом.

3) Одређујемо екстреме функције под условом

$$z = x^2 + y^2$$

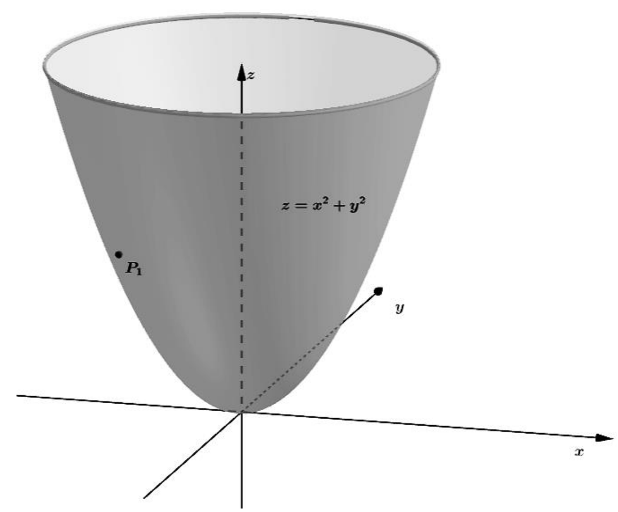
тј. под условом да се тачка налази на параболоиду

$$z = x^2 + y^2 \;\text{ за }\; z < 1,$$

Слика 3.10 б). Тада је

$$g(x, y) = u(x, y, x^2 + y^2) = x + y + x^2 + y^2$$

за $x^2 + y^2 < 1$. Добијамо



Слика 3.10 б)

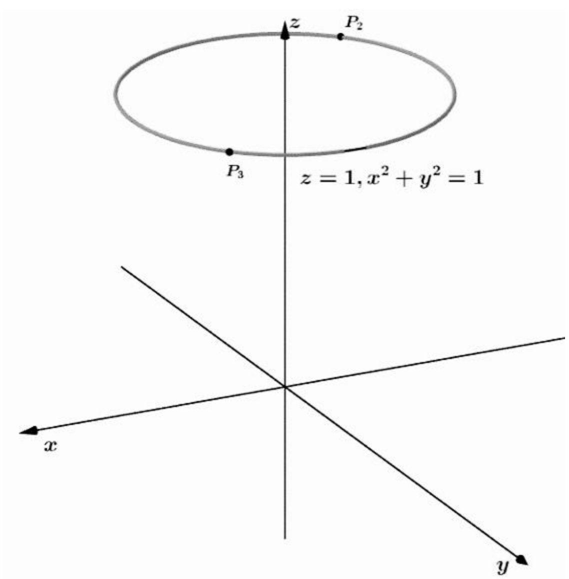
$$1+2x=0 \wedge 1+2y=0 \Rightarrow x=y=-\frac{1}{2}.$$

Дакле, тачка могућег екстрема функције g је $P_1\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Пошто је

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}=0$$

добијамо да је $A_1=2>0$, $A_2=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4>0$ па функција g у тачки P_1 има локални минимум, односно функција u има условни минимум

$$u_{min}=u\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$



Слика 3.10 в)

4) Одређујемо екстреме функције u под условом

$$x^2+y^2=1,\ z=1,$$

тј. под условом да се тачка (x,y,z) налази на кружници $x^2+y^2=1$ у равни $z=1$, Слика 3.10 в). Тада је

$$F(x,y,\lambda)=x+y+1 \ +\lambda(x^2+y^2-1).$$

Добијамо двије стационарне тачке функције F:

$$P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ и } P_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Пошто је

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$$

добијамо да је тачка P_2 тачка локалног минимума, а тачка P_3 тачка локалног максимума функције F. Дакле,

$$u_{min} = u\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = -\sqrt{2} + 1$$

$$u_{max} = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \sqrt{2} + 1.$$

5) Упоређујући вриједности функције у тачкама условних екстрема, добијамо да је

$$sup u = max u = u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \sqrt{2} + 1,$$

$$inf u = min u = u\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Уочимо да у овом примјеру за одређивање апсолутних екстрема није било нужно испитивање природе стационарних тачака већ је било довољно упоредити вриједности функције у тим тачкама, као што је то урађено у Примјеру 3.28. Ипак, испитивање природе стационарних тачака у неким случајевима може бити корисно јер се из разматрања могу искључити тачке у којима функција нема екстрем (нпр. у случајевима када функција има већи број тачака које су кандидати за апсолутни екстрем). ◊