УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2022/2023

ТЕМА 1: НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

1.1. Примитивна функција и неодређени интеграл

1.2. Смјена промјенљиве. Парцијална интеграција

1.3. Интеграција рационалних функција

1.4. Интеграција неких ирационалних функција

1.5. Интеграција тригонометријских функција

1.6. „Нерјешиви интеграли“

ЛИТЕРАТУРА: **Биљана Војводић, Владимир Владичић: Математика II, Машински факултет, Бања Лука (2022)**

НАСТАВНИК: **проф. др Биљана Војводић**

ТЕМА 1: НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

1.1. ПРИМИТИВНА ФУНКЦИЈА И НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Посматрамо задатак одређивања функције на основу познатих односа између њених извода.

Најједноставнији задатак овог типа је **одређивање функције $\boldsymbol{f(x)}$ на основу њеног извода $\boldsymbol{f'(x)}$**, што је у извјесном смислу поступак инверзан поступку диференцирања.

Дефиниција 1.1. *Нека је функција f дефинисана на (a, b). Ако постоји диференцијабилна функција F таква да је за $x \in (a, b)$*

$$F'(x) = f(x)$$

*кажемо да је F **примитивна функција** функције f на (a, b).*

Примјер 1.1. Функција $F(x) = x^4$ је примитивна функција функције $f(x) = 4x^3$ на $\mathbb{R}$ јер је

$$(x^4)' = 4x^3, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Функција $G(x) = x^4 + 5$ је такође примитивна функција функције f на $\mathbb{R}$ јер је

$$(x^4 + 5)' = 4x^3, \quad x \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

Из претходног примјера уочавамо да функција може имати више различитих примитивних функција. Сљедећа лема описује скуп свих примитивних функција дате функције.

Лема 1.1. 1) *Ако је* F *примитивна функција функције* f *на* (a, b), *тада је и функција* $F + C$, *гдје је* C *произвољна константа, такође примитивна функција функције* f *на* (a, b).

2) *Ако су* F *и* G *двије примитивне функције функције* f *на* (a, b), *тада је на* (a, b) *разлика функција* $F - G$ *константна.*

Доказ: 1) Уколико је F примитивна функција функције f на (a, b), тада је

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \qquad x \in (a, b)$$

тј. функција $F(x) + C$ је такође примитивна функција функције f на (a, b).

2) Ако су F и G двије примитивне функције дате функције f на (a, b), тада је

$$\big(F(x) - G(x)\big)' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Уколико је извод функције на интервалу (a, b) једнак нули, из Лагранжове теореме[1] слиједи да је функција на том интервалу једнака константи, тј.

$$\big(F(x) - G(x)\big)' = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) = C$$

и лема је доказана. □

---

[1] **Лагранжова теорема:** Нека је функција f непрекидна на $[a, b]$ и нека има извод на (a, b). Тада постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Дефиниција 1.2. ***Неодређени интеграл*** *функције* f *на* (a, b) *је* ***скуп свих примитивних функција*** *функције* f *на интервалу* (a, b). *Означавамо га са*

$$\int f(x)dx.$$

Функција $f(x)$ у овој дефиницији се назива **подинтегралном функцијом (интеграндом),** а израз $f(x)dx$ **подинтегрални израз**.

Поступак налажења примитивне функције називамо **интеграција или интегрисање.**

Лема 1.1 нам омогућава да опишемо скуп свих примитивних функција. Ако је F једна примитивна функција функције f на (a, b), на основу Леме 1.1 све друге примитивне функције на (a, b) су облика $F(x) + C$, па је $\{F(x) + C: C \in \mathbb{R}\}$ скуп свих примитивних функција функције f на (a, b).

Према томе, ако је F једна примитивна функција функције f на (a, b), неодређени интеграл функције f на (a, b) је

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C: C \in \mathbb{R}\},$$

што обично краће записујемо у облику

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

У сљедећој теореми показујемо да су интеграција и диференцирање инверзни поступци.

Теорема 1.1. *Ако функције f и g имају примитивне функције на (a,b), тада је:*

1) $\int f'(x)dx = f(x) + C,$

2) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$

Доказ: 1) Слиједи из дефиниције неодређеног интеграла.

2) Нека је F примитивна функција функције f на (a,b). Тада је

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x),$$

и теорема је доказана.□

Однос између неодређеног интеграла и алгебарских операција сабирања и множења скаларом описује сљедећа теорема.

Теорема 1.2. *Ако функције f и g имају примитивне функције на (a,b), тада је:*

1) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx\,, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и

4) $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Доказ: 1) Показујемо да су једнаки изводи функција са лијеве и десне стране једнакости.[2] Диференцирањем неодређених интеграла са лијеве и десне стране једнакости и користећи особину 2) из Теореме 1.1 добијамо

$$\left(\int \alpha f(x)dx\right)' = \alpha f(x) \qquad \text{и} \qquad \left(\alpha \int f(x)dx\right)' = \alpha\left(\int f(x)dx\right)' = \alpha f(x)$$

па вриједи једнакост 1).

2) Користећи особину 2) из Теореме 1.1, за извод неодређеног интеграла са лијеве стране једнакости добијамо

$$\left(\int \big(f(x) + g(x)\big)dx\right)' = f(x) + g(x),$$

док за извод збира неодређених интеграла са десне стране једнакости имамо

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) + g(x),$$

тј. вриједи једнакост извода а самим тим и једнакост 2). Теорема је доказана □

Примједба 1.2. Уочимо да једнакост 1) из Теореме 1.2 не вриједи за $\alpha = 0,$ јер у том случају имамо $\int 0dx = C,$ гдје је C произвољна константа, док је $0 \cdot \int f(x)dx = 0$.

Неодређене интеграле неких функција одређујемо на основу познатих извода одговарајућих елементарних функција, тј. таблица извода генерише таблицу неодређених интеграла.

[2] Ако је $(\int f(x)dx)' = (\int g(x)dx)'$ онда на основу особине 2) из Теореме 1.1 добијамо да је $f(x) = g(x)$ па је $\int f(x)dx = \int g(x)dx$.

Таблица неодређених интеграла

Функција	**Интеграл**	**Интервал за x**	**Функција**	**Интеграл**	**Интервал за x**
$x^a, a \geq 0$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$	$(-\infty, +\infty)$	$x^a, a < 0,$ $a \neq -1$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C,$	$(-\infty, 0)$ или $(0, +\infty)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$	$(-\infty, -1)$ или $(-1,1)$ или $(1, +\infty)$
$sinx$	$-cosx + C$	$(-\infty, +\infty)$	$cosx$	$sinx + C$	$(-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{cos^2x}$	$tgx + C$	$\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right),$ $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{sin^2x}$	$-ctgx + C$	$(k\pi, (k+1)\pi),$ $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx + C$	$(-1,1)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arctgx + C$	$(-\infty, +\infty)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$	$(-\infty, -1)$ или $(1, +\infty)$
$a^x,$ $a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C,$	$(-\infty, +\infty)$	e^x	$e^x + C$	$(-\infty, +\infty)$
shx	$chx + C$	$(-\infty, +\infty)$	chx	$shx + C$	$(-\infty, +\infty)$

Примјер 1.2. Наћи неодређене интеграле сљедећих функција:

а) $2x^5 + 5x^2 - 3x + 7,$ б) $tg^2 x,$ в) $\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x^2}.$

Рјешење: а) $\int (2x^5 + 5x^2 - 3x + 7)dx = \frac{1}{3}x^6 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7x + C,\ C \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$

б) $\int tg^2 x dx = tgx - x + C,\ x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}.$

в) $\displaystyle\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} dx == -\frac{1}{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + \ln x + C, \qquad x \in (0, +\infty)$

Примитивна функција не постоји увијек и њена егзистенција зависи и од интервала дефинисаности подинтегралне функције и њених особина на том интервалу. Тако функција f која има прекид прве врсте у некој тачки из (a,b) нема примитивну функцију на (a,b).[3]

Примјер 1.3. Функција $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 3x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ нема примитивну функцију на $(-\infty, +\infty)$.

[3] Видјети Б. Војводић и В. Владичић, *Математика II*, Задатак 5, Поглавље 1.1

1.2. СМЈЕНА ПРОМЈЕНЉИВЕ. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Смјена промјенљиве је метод за израчунавање неодређеног интеграла којим се увођењем нове промјенљиве поједностављује подинтегрална функција. Формуле за смјену промјенљиве у интегралном рачуну су еквивалентне правилу за извод сложене функције у диференцијалном рачуну.

У неким случајевима уводи се смјена $x = \varphi(t)$, а често је једноставније одредити интеграл увођењем смјене $\varphi(x) = t$.

Теорема 1.3. (Смјена $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$) *Ако функција f има примитивну функцију на (a, b) и ако је $\varphi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ диференцијабилна функција, тада је*

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \tag{1.1}$$

Доказ: Нека је F примитивна функција функције f на (a, b) и $x = \varphi(t)$. Из извода сложене функције добијамо

$$\Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$$

па је $F\big(\varphi(t)\big)$ примитивна функција функције $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на (α, β). Дакле,

$$\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = F\big(\varphi(t)\big) + C,$$

па вриједи формула (1.1). Теорема је доказана. □

Примјер 1.4. Израчунати интеграл

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Рјешење: За $x \in (0,+\infty)$ уведимо смјену $x = \varphi(t) = t^2$, $\varphi: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$. Испуњени су услови за примјену Теореме 1.3 и из формуле (1.1) имамо

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) = t^2 \\ dx = \varphi'(t)dt = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{(1+t^2)t} =$$

$$2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C, \quad x \in (0,+\infty). \ \lozenge$$

Теорема 1.4. (Смјена $\boldsymbol{\varphi(x) = t}$) *Нека функција f има примитивну функцију на (a,b) и нека је $\varphi: (a,b) \to (\alpha,\beta)$ непрекидно диференцијабилна функција која има инверзну функцију $\varphi^{-1} = \psi: (\alpha,\beta) \to (a,b)$. Тада је*

$$\int f(\varphi(x))dx = \int f(t)\psi'(t)dt. \tag{1.2}$$

Доказ: Пошто је $x = \psi(t)$, доказ слиједи из Теореме 1.3. $\square$

Примјер 1.5. Израчунати интеграле

а) $\int (2x-3)^{10}dx$, б) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$.

Рјешење: а) Уводимо смјену

$$\varphi(x) = t = 2x - 3, \qquad \varphi: (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty).$$

За инверзну функцију имамо

$$\varphi^{-1}(t) = \psi(t) = \frac{t+3}{2}, \ \ \psi: (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

и испуњени су услови за примјену Теореме 1.4 на $(-\infty, +\infty)$. Коришћењем формуле (1.2) добијамо

$$\int (2x-3)^{10}dx = \left| \begin{array}{c} \varphi(x) = 2x - 3 = t \\ \psi'(t)dt = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{22} + C = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

б) Уводимо смјену

$$\varphi(x) = t = 1 + x^2, \qquad \varphi: (-\infty, +\infty) \to [1, +\infty).$$

Функција φ није бијекција па нема инверзну функцију на читавом домену. Зато посматрамо посебно интервале $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$ на којима функција φ има диференцијабилну инверзну функцију ψ.

За $x \in (0,+\infty)$ имамо

$$\psi(t) = \sqrt{t-1}, \qquad \psi: (1,+\infty) \to (0,+\infty), \qquad \psi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}$$

па су испуњени услови за примјену Теореме 1.4. Из формуле (1.2) добијамо

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{\sqrt{t-1}}{t} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1.$$

За $x \in (-\infty,0)$ имамо

$$\psi(t) = -\sqrt{t-1}, \qquad \psi: (1,+\infty) \to (-\infty,0), \qquad \psi'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t-1}}.$$

и добијамо

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \frac{(-\sqrt{t-1})}{t} \cdot \frac{dt}{(-2\sqrt{t-1})} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C_2 = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_2.$$

Из услова непрекидности примитивне функције у тачки $x = 0$ добијамо $C_1 = C_2 = C$. Примитивна функција $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ је диференцијабилна и за $x = 0$ па је

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad x \in (-\infty,+\infty). \ \Diamond$$

Примједба 1.3. Поступак рјешавања интеграла увођењем смјене $\varphi(x) = t$ и примјеном формуле (1.2) можемо поједноставити на начин да не морамо увијек да одређујемо инверзну функцију. Наиме, из смјене промјенљиве имамо

$$\varphi(x) = t \Rightarrow \varphi'(x)dx = dt,$$

па уколико се у подинтегралној функцији као чинилац појављује $c \cdot \varphi'(x)$, $c \neq 0$, онда не морамо одређивати инверзну функцију већ из везе диференцијала изразимо

$$c \cdot \varphi'(x)dx = cdt.$$

У Примјеру 1.5 б) је

$$\varphi(x) = 1 + x^2 = t \Longrightarrow \varphi'(x) = 2x$$

при чему се у подинтегралној функцији појављује функција

$$x = \frac{1}{2}\varphi'(x).$$

Из везе диференцијала добијамо

$$\frac{1}{2}\varphi'(x)dx = xdx = \frac{1}{2}dt.$$

Према томе, поступак рјешавања интеграла је сљедећи:

$$\int \frac{x}{1 + x^2}dx = \left| \begin{array}{c} 1 + x^2 = t \\ 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$$

Коришћењем Теореме 1.4 доказује се лема о **линеарној смјени у неодређеном интегралу**.

Лема 1.2. *Ако функција* f *има примитивну функцију* F *на* (a, b), *тада за произвољне реалне бројеве* c *и* d, $c \neq 0$ *вриједи*

$$\int f(cx+d)dx = \frac{1}{c}F(cx+d) + C. \tag{1.3}$$

Доказ: Смјеном промјенљиве добијамо:

$$\int f(cx+d)dx = \left| \begin{array}{c} cx+d=t \\ cdx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{c}dt \end{array} \right| = \frac{1}{c}\int f(t)dt = \frac{1}{c}F(t) + C = \frac{1}{c}F(cx+d) + C. \quad \square$$

Примјер 1.6. Израчунати интеграле:

а) $\int sin2xdx$, б) $\int \frac{dx}{5-4x}$, в) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$.

Рјешење: а) Из $\int sinxdx = -cosx + C$, примјеном линеарне смјене из формуле (1.3) добијамо

$$\int sin2xdx = -\frac{1}{2}cos2x + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

б) $\int \frac{dx}{5-4x} = -\frac{1}{4}\ln|5-4x| + C,\ x \in \left(-\infty, \frac{5}{4}\right)$ или $x \in \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

в) $\int \frac{dx}{2+4x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+2x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(x\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\left(x\sqrt{2}\right) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

Парцијална интеграција је метод за израчунавање неодређеног интеграла којим се дати интеграл представља у облику збира познате функције и непознатог, али једноставнијег интеграла. Формуле за парцијалну интеграцију у интегралном рачуну у су еквивалентне правилу за извод производа функција у диференцијалном рачуну.

Теорема 1.5. (Парцијална интеграција) *Нека су функције u и v диференцијабилне и нека постоји примитивна функција функције $u'(x)v(x)$ на (a,b). Тада на (a,b) постоји примитивна функција функције $u(x)v'(x)$ и вриједи једнакост*

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x). \tag{1.4}$$

Доказ: Ако су су функције u и v диференцијабилне, тада је

$$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Одавде интеграцијом добијамо

$$\int \big(u(x)v(x)\big)' dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)dx.$$

Коришћењем особине 1) из Теореме 1.1 и претпоставке о постојању примитивне функције функције $u'(x)v(x)$ на (a,b), добијамо да на (a,b) постоји и примитивна функција функције $u(x)v'(x)$ и да вриједи једнакост (1.4). □

Примјер 1.7. Израчунати интеграле

а) $\int x\ln x dx$, б) $\int (2x^2 - x + 3)e^{-3x}dx$.

Рјешење: а) Посматрамо сљедећа два природна избора за функцију u и израз dv: први

$$u = x, \quad dv = \ln x dx$$

и други

$$u = \ln x, \quad dv = xdx.$$

Код првог избора уочавамо да је само одређивање функције v захтјевно једнако као и рјешавање почетног интеграла, док се код другог избора из dv једноставно може одредити функција v пошто је позната примитивна функција функције x. Зато користимо други избор за функцију u и израз dv и добијамо:

$$\int x\ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \qquad x > 0.$$

б) И у овом примјеру се намећу два природна избора за u и dv: први

$$u = 2x^2 - x + 3, \quad dv = e^{-3x}dx$$

и други

$$u = e^{-3x}, \quad dv = (2x^2 - x + 3)dx.$$

Примјеном парцијалне интеграције са другим избором за u и dv појавио би се интеграл који би био компликованији од почетног јер би у њему фигурисао полином вишег степена у односу на степен полинома у почетном интегралу. Зато примјењујемо парцијалну интеграцију са првим избором функције u и израза dv:

$$\int (2x^2 - x + 3)e^{-3x}dx = \begin{vmatrix} u = 2x^2 - x + 3 & dv = e^{-3x}dx \\ du = (4x-1)dx & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{3}(2x^2 - x + 3)e^{-3x} + \frac{1}{3}\int (4x-1)e^{-3x}dx.$$

Интеграл $\int (4x-1)e^{-3x}dx$ одређујемо такође примјеном парцијалне интеграције

$$\int (4x-1)e^{-3x}dx = \begin{vmatrix} u = 4x - 1 & dv = e^{-3x}dx \\ du = 4dx & v = -\frac{1}{3}e^{-3x} \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{1}{3}(4x-1)e^{-3x} + \frac{4}{3}\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}(4x-1)e^{-3x} - \frac{4}{9}\, e^{-3x} + C.$$

Коначно добијамо

$$\int (2x^2 - x + 3)e^{-3x}dx = -\frac{1}{27}(18x^2 + 3x + 28)e^{-3x} + C, \qquad x \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

1.3. ИНТЕГРАЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

Функција облика

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

гдје су $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ полиноми са реалним коефицијентима степена n и m респективно, назива се **рационална функција**.

Ако је $n < m$ кажемо да је $R(x)$ **права рационална функција**. Ако је $n \geq m$, рационална функција $R(x)$ се може представити у облику збира полинома и праве рационалне функције.

Примјер 1.6. Функцију

$$f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x - 2}$$

представити у облику збира полинома и праве рационалне функције.

Рјешење: Дијељењем полинома у бројиоцу полиномом у имениоцу [4] добијамо

$$3x^4 + 2x^2 - 3x + 1 = (3x^2 + 3x + 11)(x^2 - x - 2) + 14x + 23$$

па функцију f представљамо у облику

$$f(x) = \frac{(x^2 - x - 2)(3x^2 + 3x + 11) + 14x + 23}{x^2 - x - 2} = 3x^2 + 3x + 11 + \frac{14x + 23}{x^2 - x - 2}. \ \lozenge$$

[4] Поступак дијељења видјети у Б. Војводић и В. Владичић, *Математика II*, Примјер 1.6

Посматрамо интеграле облика

$$\int R(x)dx$$

гдје је R права рационална функција.

За рјешавање ових интеграла користи се представљање праве рационалне функције у облику збира **елементарних (парцијалних, простих) разломака прве и друге врсте**, при чему су **елементарни разломци прве врсте** разломци облика

$$\frac{A}{(x-a)^k} \qquad A,\ a \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

а **елементарни разломци друге врсте** облика

$$\frac{Mx+N}{(x^2+bx+c\,)^k}, \qquad M,N,b,c \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad b^2-4c<0.$$

Пошто је

$$x^2+bx+c=(x-p)^2+q^2 \quad \text{за} \quad p=-\frac{b}{2}, \quad q^2=\frac{4c-b^2}{4},$$

у наставку посматрамо **елементарне разломке друге врсте** облика

$$\frac{Mx+N}{((x-p)^2+q^2\,)^k}, \qquad M,N,p,q \in \mathbb{R},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Свака права рационална функција се на јединствен начин може представити у облику збира коначно много елементарних разломака.

Облик елементарних разломака који се појављују у овом представљању зависи од облика полинома у имениоцу, тј. од његове факторизације. Сваки полином са реалним коефицијентима се може представити у облику производа полинома првог и другог степена, при чему је дискриминанта полинома другог степена негативна.

Сваки од ових фактора генерише одређени сабирак састављен од једног или више елементарних разломака. У Табели 1.1 наведен је облик ових сабирака у зависности од облика фактора у имениоцу праве рационалне функције.

Редни број	Облик фактора полинома у имениоцу	Облик елементарних разломака
1	$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
2	$(x-a)^k$	$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$
3	$(x-p)^2+q^2$	$\frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}$
4	$((x-p)^2+q^2)^k$	$\frac{M_1x+N_1}{(x-p)^2+q^2}+\frac{M_2x+N_2}{((x-p)^2+q^2)^2}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{((x-p)^2+q^2)^k}$

Табела 1.1.

Примјер 1.7. Функцију

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}$$

представити у облику збира елементарних разломака.

Рјешење: Користећи Табелу 1.2 добијамо

$$\frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}.$$

Имамо

$$2x+1=A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2$$

односно

$$2x+1=(A+C)x^2+(B-2C)x-A+B+C.$$

Одавде добијамо систем

$$A+C=0\wedge B-2C=2\wedge -A+B+C=1,$$

чије је рјешење

$$A=\frac{1}{4},B=\frac{3}{2},C=-\frac{1}{4}.$$

Дакле,

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}=\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)}.\ \lozenge$$

1.3.1. Интеграција елементарних разломака прве врсте

Интеграл рјешавамо увођењем смјене $x-a=t$ или директном примјеном формуле (1.3) за линеарну смјену. За $x \in (-\infty, a)$ или $x \in (a, \infty)$ добијамо

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & k=1 \\ -\dfrac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, & k>1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Примјер 1.8. Израчунати интеграл $\int f(x)dx$ гдје је $f(x)$ функција из Примјера 1.7.

Рјешење: На основу Примјера 1.7 и представљања функције у облику збира елементарних разломака добијамо

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-1)(x-1)}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{3}{2(x-1)} + C. \ \lozenge$$

Примјер 1.9. Израчунати интеграл $\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-x-2}dx$.

Рјешење:

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x^2-x-2}dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{13}{3}\ln|x-2| + C. \ \lozenge$$

1.3.2. Интеграција елементарних разломака друге врсте за $k = 1$

Смјеном $x - p = t, dx = dt$ добијамо

$$\int \frac{Mx+N}{(x-p)^2+q^2}dx = \int \frac{Mt+pM+N}{t^2+q^2}dt = M\int \frac{t}{t^2+q^2}dt + (pM+N)\int \frac{1}{t^2+q^2}dt.$$

Пошто је

$$\int \frac{t}{t^2+q^2}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+q^2) + C$$

и

$$\int \frac{1}{t^2+q^2}dt = \frac{1}{q^2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{q}\right)^2+1}dt = \frac{1}{q}arctg\frac{t}{q} + C$$

добијамо

$$\int \frac{Mx+N}{((x-p)^2+q^2}dx = \frac{M}{2}\ln((x-p)^2+q^2) + \frac{pM+N}{q}arctg\frac{x-p}{q} + C.$$

Примјер 1.12. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{1}{(x^2-2x+5)(x-3)}dx.$$

Рјешење: Пошто је дискриминанта квадратног тринома у имениоцу негативна, користимо Табелу 1.1 за факторе облика 1 и 3. Добијамо

$$\frac{1}{(x-3)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$$

одакле је

$$A=B=C=-\frac{1}{8}.$$

Имамо

$$\int\frac{1}{(x^2-2x+5)(x-3)}dx=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-3}dx-\frac{1}{8}\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx=$$

$$\frac{1}{8}\ln|x-3|-\frac{1}{8}\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx.$$

Даље је

$$\int\frac{x+1}{x^2-2x+5}dx=\int\frac{x+1}{(x-1)^2+4}dx=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=$$

$$\int\frac{t+2}{t^2+4}dt=\int\frac{t}{t^2+4}dt+2\int\frac{1}{t^2+4}dt=$$

$$\frac{1}{2}\ln(t^2+4)+arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+arctg\frac{x-1}{2}+C.$$

Дакле,

$$I=\frac{1}{8}\ln|x-3|-\frac{1}{16}\ln(x^2-2x+5)-\frac{1}{8}arctg\frac{x-1}{2}+C,\quad x\in(-\infty,3)\text{ или }x\in(3,+\infty).\lozenge$$

1.3.3. Интеграција елементарних разломака друге врсте за $k > 1$

Смјеном $x - p = t$ добијамо

$$\int \frac{Mx + N}{((x-p)^2 + q^2)^k} dx = M \int \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} dt + (pM + N) \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = MJ_1 + (pM + N)J_2.$$

За интеграл J_1 имамо

$$J_1 = \int \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} dt = \left| \begin{matrix} t^2 + q^2 = s \\ tdt = \frac{1}{2} ds \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{s^k} = -\frac{1}{2(k-1)s^{k-1}} + C$$

па је

$$\int \frac{t}{(t^2 + q^2)^k} dt = -\frac{1}{2(k-1)(t^2 + q^2)^{k-1}} + C.$$

За интеграл J_2 имамо

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + q^2)^k} = \frac{1}{q^{2k}} \int \frac{dt}{\left(\left(\frac{t}{q}\right)^2 + 1\right)^k} = \left| \begin{matrix} \frac{t}{q} = s \\ dt = qds \end{matrix} \right| = \frac{1}{q^{2k-1}} \int \frac{ds}{(s^2 + 1)^k}.$$

Нека је

$$I_k = \int \frac{ds}{(s^2 + 1)^k}. \tag{1.9}$$

Ако је $k = 1$ тада имамо таблични интеграл

$$I_1 = \int \frac{ds}{s^2+1} = arctgs + C_1.$$

За $k \geq 2$ интеграле I_k рачунамо помоћу **рекурентне формуле**, тј. формуле која даје везу између интеграла I_k и његовог претходника I_{k-1} или више њих.

Да бисмо дошли до ове везе уочимо да је

$$I_k = \int \frac{ds}{(s^2+1)^k} = \int \frac{(1+s^2)-s^2}{(s^2+1)^k} ds = I_{k-1} - \int \frac{s^2}{(s^2+1)^k} ds. \tag{1.10}$$

Подинтегралну функцију у другом интегралу у (1.10) запишемо на начин подесан за примјену парцијалне интеграције:

$$\int \frac{s^2}{(s^2+1)^k} ds = \int s \cdot \frac{s}{(s^2+1)^k} ds = \left| \begin{array}{ll} u = s & dv = \dfrac{s}{(s^2+1)^k} ds \\ du = ds & v = -\dfrac{1}{2(k-1)(s^2+1)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$-\frac{s}{2(k-1)(s^2+1)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{ds}{(s^2+1)^{k-1}}.$$

Уврштавањем у (1.10) добијамо

$$I_k = I_{k-1} + \frac{s}{2(k-1)(s^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1}.$$

Тако долазимо до рекурентне формуле

$$I_k = \frac{s}{2(k-1)(s^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1}, \qquad k = 2,3,\ldots \tag{1.11}$$

Нпр. за $k = 2$ из (1.11) имамо

$$I_2 = \int \frac{ds}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2} I_1 + \frac{s}{2(s^2+1)} = \frac{1}{2} arctgs + \frac{s}{2(s^2+1)} + C.$$

Примјер 1.12. Израчунати интеграл

$$\int \frac{x^2}{(x^2+8x+20)^3} dx.$$

Рјешење: $I = \frac{13}{64} arctg \frac{x+4}{2} + \frac{13(x+4)}{32(x^2+8x+20)} + \frac{3x+20}{4(x^2+8x+20)^2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

1.4. ИНТЕГРАЦИЈА НЕКИХ ИРАЦИОНАЛНИХ ФУНКЦИЈА

1.4.1. Интеграли облика $\int R\left(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$

Претпостављамо да је R рационална функција промјењљивих $x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}} \dots, x^{\frac{p_k}{q_k}}, p_i, q_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, k.$

Смјеном

$$x = t^q, \quad q = NZS(q_1, q_2, \dots, q_k)$$

интеграл сводимо на интеграл рационалне функције по t.

Примјер 1.11. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)} dx.$$

Рјешење: $NZS(3,6) = 6 \Rightarrow x = t^6,\ dx = 6t^5 dt.$ Имамо

$$I = 6\int \frac{t^6 + t^4 + t}{t^6(1 + t^2)} t^5 dt = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1 + t^2} dt = 6\int t^3\, dt + 6\int \frac{1}{1 + t^2} dt =$$

$$\frac{3}{2}t^4 + 6arctgt + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6arctg\sqrt[6]{x} + C.\lozenge$$

1.4.2. Интеграли облика $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Ови интеграли се своде на интеграле рационалних функција помоћу **Ојлерових**[5] **смјена:**

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a},$ ако је $a > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c},$ ако је $c > 0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)t,$ ако је $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$

Примјер 1.12. Израчунати интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Рјешење: Уводимо смјену $\sqrt{x^2+x+1} = t - x.$ Добијамо

$$I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}dt = 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{2t+1} - 3\int \frac{dt}{(2t+1)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + \frac{3}{2(2t+1)} + C, \qquad t = x+\sqrt{x^2+x+1}. \quad \lozenge$$

[5] Leonhard Euler (1707 - 1783), швајцарски математичар и физичар

1.4.3. Интеграли облика $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

Претпостављамо да је $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ и $P_n(x)$ полином степена n. За одређивање интеграла овог облика можемо користити **метод Остроградског**[6] који подразумијева трансформацију почетног интеграла у облик

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \tag{1.13}$$

гдје су $Q_{n-1}(x)$ полином степена $n-1$ и λ реалан број које треба одредити из услова да вриједи једнакост (1.13).

Диференцирањем у (1.13) и након тога множењем једнакости са $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ добијамо

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + Q_{n-1}(x)\left(ax + \frac{b}{2}\right) + \lambda \tag{1.14}$$

Изједначавајући коефицијенте полинома на лијевој и десној страни једнакости (1.14), одређујемо коефицијенте полинома $Q_{n-1}(x)$, као и реалан број λ. Након тога рјешавамо интеграл на десној страни у (1.13) користећи нпр. Ојлерове смјене или на неки други начин.

Уочимо да смо почетни интеграл могли рјешавати и Ојлеровим смјенама, али метод Остроградског омогућава да умјесто почетног одређујемо једноставнији интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

[6] Михаи́л Васи́льевич Острогра́дский (1801 –1862), руски математичар и физичар

Примјер 1.19. Израчунати интеграл

$$I=\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx.$$

Рјешење: Примјеном методе Остроградског добијамо

$$\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Диференцирањем и након тога множењем са $\sqrt{x^2-2x+5}$, добијамо

$$2x^2-3x=A(x^2-2x+5)+(Ax+B)(x-1)+\lambda.$$

Одавде добијамо $A=1,\ -B=0,\ \lambda=-5,$ тј.

$$I=\int \frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=x\sqrt{x^2-2x+5}-5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

За интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ можемо користити Ојлерове смјене јер је $a>0$ и $c>0$. Међутим, интеграл можемо једноставније ријешити коришћењем линеарне смјене из (1.3) јер је

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}}=\ln\left|\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}+\frac{x-1}{2}\right|+C=\ln\left|\sqrt{x^2-2x+5}+x-1\right|+C.^{7}$$

Дакле,

$$I=x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left|\sqrt{x^2-2x+5}+x-1\right|+C,\qquad x\in\mathbb{R}.\ \lozenge$$

[7] Уочимо да је $\ln\frac{\left|\sqrt{x^2-2x+5}+x-1\right|}{2}=\ln\left|\sqrt{x^2-2x+5}+x-1\right|-\ln 2,$ те да $\ln 2$ можемо придружити константи C.

1.4.4. Интеграл биномног диференцијала $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

Нека је $m,n,p \in \mathbb{Q}$, $m=\frac{m_1}{m_2}$, $n=\frac{n_1}{n_2}$, $p=\frac{p_1}{p_2}, a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ није могуће ријешити за произвољне вриједности параметара m, n, p.[8]

Руски математичар Чебишев[9] је показао да се интеграл биномног диференцијала може одредити само у три случаја и да се тада своди на интеграл рационалне функције.

- $p \in \mathbb{Z}$, уводимо смјену $x=t^k, k=NZS(m_2,n_2)$
- $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, уводимо смјену $a+bx^n=t^{p_2}$,
- $p+\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, уводимо смјену $ax^{-n}+b=t^{p_2}$.

Примјер 1.13. Израчунати интеграл

$$I=\int \frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx.$$

[8] Видјети поглавље 1.6. „Нерјешиви“ интеграли

[9] Пафну́тий Льво́вич Чебышёв (1821 –1894), руски математичар

Рјешење: $I = \int x\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{-1/2} dx$ па је $m = 1, n = \frac{2}{3}, p = -\frac{1}{2}$. Пошто је

$$\frac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}$$

уводимо смјену

$$1+\sqrt[3]{x^2} = t^2.$$

Добијамо

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}dx = 2tdt \Rightarrow xdx = 3t\sqrt[3]{x^4}dt \Rightarrow xdx = 3t(t^2-1)^2dt.$$

Према томе

$$I = 3\int t(t^2-1)^2\frac{1}{t}dt = 3\int (t^4-2t^2+1)\,dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C, t = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}. \;\lozenge$$

1.5. ИНТЕГРАЦИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

1.5.1. Интеграли облика $\int R(sinx, cosx)dx$

Претпоставимо да је R рационална функција промјенљивих $sinx$ и $cosx$. Интеграл се помоћу смјене

$$t = tg\frac{x}{2}$$

своди на интеграл рационалне функције. Имамо

$$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Уврштавањем добијамо

$$\int R(sinx, cosx)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Функција $R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ је као композиција рационалних функција такође рационална функција, па је и подинтегрална функција рационална функција.

Примјер 1.14. Израчунати интеграл

$$\int \frac{dx}{sin^3 x}.$$

Рјешење:

$$\int \frac{dx}{sin^3 x} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+t^2\right)^2}{t^3} dt =$$

$$-\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{8}t^2 + C = -\frac{1}{8}ctg^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}tg^2\frac{x}{2} + C =$$

$$-\frac{1}{2}ctgx + \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}. \quad \lozenge$$

У неким случајевима интеграли облика $\int R(sinx, cosx)dx$ се могу једноставније ријешити увођењем неких других смјена, што зависи од облика и особина подинтегралне функције.

- Ако је

$$R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$$

  може се увести смјена $cosx = t$.

- Ако је

$$R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$$

  може се увести смјена $sinx = t$.

- Ако је
$$R(-sinx,-cosx)=R(sinx,cosx)$$
може се увести смјена $tgx=t$ (или $ctgx=t$). Тада је
$$sinx=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},cosx=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Тако смо у Примјеру 1.14 могли увести смјену $cosx=t$ јер је подинтегрална функција непарна по $sinx$:
$$R(-sinx,cosx)=\frac{1}{(-sinx)^3}=-\frac{dx}{sin^3x}=-R(sinx,cosx).$$
Тада је
$$\int\frac{dx}{sin^3x}=\int\frac{sinxdx}{sin^4x}=\int\frac{sinxdx}{(1-cos^2x)^2}=\left|\begin{matrix}cosx=t\\ sinxdxdx=-dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{1}{(1-t^2)^2}dt$$
и потребно је подинтегралну функцију представити у облику збира четири елементарна разломка.

Примјер 1.24. Израчунати интеграл
$$I=\int\frac{dx}{(2+sin^2x)cosx}.$$

Рјешење: Подинтегрална функција је непарна по $cosx$ јер је

$$R(sinx, -cosx) = \frac{dx}{(2+sin^2x)(-cosx)} = -\frac{1}{(2+sin^2x)cosx} = -R(sinx, cosx)$$

Уводимо смјену $sinx = t$ и добијамо

$$I = \int \frac{dx}{(2+sin^2x)cosx} = \int \frac{cosxdx}{(2+sin^2x)(1-sin^2x)} =$$

$$\left| \begin{matrix} sinx = t \\ cosxdx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{(2+t^2)(1-t^2)}dt = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{2+t^2} - \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} arctg \frac{sinx}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{sinx+1}{sinx-1}\right| + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \ \lozenge$$

1.5.2. Интеграли облика $\int sin^n x cos^m x dx\,, \quad m, n \in \mathbb{Z}$

Интеграли овог облика су специјалан случај интеграла облика 1.5.1 па на њих примјењујемо напријед наведене смјене.

Специјално, у случајевима када су оба броја m и n парни природни бројеви, за рјешавање интеграла се могу користити тригонометријски идентитети

$$cos^2 x = \frac{1 + cos2x}{2}, \qquad sin^2 x = \frac{1 - cos2x}{2}. \tag{1.15}$$

Тада добијамо

$$\int sin^{2k} x cos^{2p} x dx = \frac{1}{2^{k+p}} \int (1 - cos2x)^k (1 + cos2x)^p dx.$$

Поновном примјеном формула (1.15) за парне степене тригонометријских функција које се појављују у подинтегралној функцији и/или увођењем смјене промјенљиве у случају када је један од степена тригинометријских функција непаран, долазимо до рјешења интеграла (уколико вриједности природних бројева k и p нису „велике“) или одређујемо рекурентну формулу за рјешавање интеграла.

Примјер 1.27. Израчунати интеграл

$$I = \int sin^2 x cos^4 x dx.$$

Рјешење: У овом случају су оба степена парна, $n = 2,\ m = 4.$ Можемо увести смјену $tgx = t,$ и тада добијамо

$$I = \int sin^2 x cos^4 x dx = \int \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2}{(1+t^2)^4} dt.$$

Даље овај интеграл сводимо на интеграл облика (1.9) и рјешавамо помоћу рекурентне формуле (1.11). Међутим, интеграл можемо једноставније ријешити примјеном тригонометријских идентитета (1.15). Тада је

$$I = \int sin^2 x cos^4 x dx = \int \frac{1 - cos2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{8} \int (1 - cos^2 2x)(1 + cos2x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - cos^2 2x + cos2x - cos^3 2x) dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \left(1 - \frac{1 + cos4x}{2} + cos2x - cos^2 2x cos2x\right) dx =$$

$$\frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int cos4x dx + \frac{1}{8} \int cos2x dx - \frac{1}{8} \int (1 - sin^2 2x) cos2x dx =$$

$$\frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int cos4x dx + \frac{1}{8} \int sin^2 2x cos2x dx.$$

У горњим интегралима уводимо смјене: $4x = t$ и $sin2x = t$ респективно, и добијамо

$$I = \frac{x}{16} - \frac{sin4x}{64} + \frac{sin^3 2x}{48} + C, \qquad x \in \mathbb{R}. \ \lozenge$$

1.5.3. Интеграли облика $\int \boldsymbol{sin(\alpha_1 x)\cdots sin(\alpha_n x) cos(\beta_1 x)\cdots cos(\beta_m x) dx}$

Претпостављамо да је $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots m$, $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Интеграле овог облика одређујемо тако што подинтегралну функцију трансформишемо примјеном формула за трансформацију производа тригонометријских функција у збир/разлику:

$$sin(\alpha x)cos(\beta x) = \frac{1}{2}(sin(\alpha+\beta)x + sin(\alpha-\beta)x),$$

$$cos(\alpha x)cos(\beta x) = \frac{1}{2}(cos(\alpha+\beta)x + cos(\alpha-\beta)x),$$

$$sin(\alpha x)sin(\beta x) = \frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)x - cos(\alpha+\beta)x).$$

Примјер 1.29. Израчунати интеграл

$$I = \int sin2xcos3xsin4xdx.$$

Рјешење:

$$I = \int sin2xcos3xsin4xdx = \frac{1}{2}\int (sin5x - sinx)sin4xdx =$$

$$\frac{1}{4}\int (cosx - cos9x - cos3x + cos5x)dx = \frac{sinx}{4} - \frac{sin9x}{36} - \frac{sin3x}{12} + \frac{sin5x}{20} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.5.4. Интеграли облика $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ и $\int R\left(x,\sqrt{x^2\pm a^2}\right)dx$

Претпостављамо да је R рационална функција промјенљивих x и $\sqrt{a^2-x^2}$, односно x и $\sqrt{x^2\pm a^2}$.

Иако су ови интеграли облика $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ (Поглавље 1.4.2) и могу се рјешавати Ојлеровим смјенама, у неким случајевима једноставније се одређују трансформисањем у интеграле тригонометријских функција.

- За интеграл облика $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ можемо користити смјену

$$x=\varphi(t)=asint, \qquad \varphi:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-a,a).$$

Тада је $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2sin^2t}=a|cost|=acost,\ dx=acostdt.$

- За интеграл облика $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ можемо увести смјену

$$x=\varphi(t)=\frac{a}{cost}, \qquad \varphi:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to(a,+\infty).$$

Тада је $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{cos^2t}-a^2}=a\frac{sint}{cost},\ dx=a\frac{sint}{cos^2t}dt.$ [10]

[10] На исти начин можемо увести смјену $x=\varphi(t)=\frac{a}{cost},\ \varphi:\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\to(-\infty,a)$

- За интеграл облика $\int R\left(x,\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$ можемо користити смјену

$$x=\varphi(t)=atgt, \qquad \varphi\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to(-\infty,+\infty).$$

Тада је $\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2tg^2t+a^2}=\frac{a}{|cost|}=\frac{a}{cost}$, $dx=\frac{a}{cos^2t}dt$.

Примјер 1.30. Израчунати интеграл

$$I=\int\sqrt{4-x^2}dx.$$

Рјешење: Уводимо смјену $x=2sint$, $|x|<2$, $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Уочимо да је $cost>0$ за $t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ и да је $t=arcsin\frac{x}{2}$. Добијамо

$$I=4\int\sqrt{1-sin^2t}costdt=4\int|cost|costdt=4\int cos^2tdt=$$

$$2\int(1+cos2t)dt=2t+sin2t+C=2t+2sintcost+C=$$

$$2arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C, \qquad x\in(-2,2).\ \lozenge$$

1.6. „НЕРЈЕШИВИ“ ИНТЕГРАЛИ

У претходним разматрањима показали смо како се одређују примитивне функције за неке класе елементарних функција. Међутим, доказано је да примитивна функција елементарне функције не мора увијек да буде елементарна функција. За овакве интеграле се каже и да су **„нерјешиви“.** Нпр. може се показати да интеграли

$$\int e^{-x^2}dx, \qquad \int sinx^2 dx, \qquad \int \frac{sinx}{x}dx$$

нису елементарне функције, односно да су „нерјешиви“. Међутим, то не значи да они уопште не постоје већ само да нису елементарне функције. Неки од основних типова ових интеграла су:

- интегрални логаритам

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}x + C,$$

- интегрални синус

$$\int \frac{sinx}{x}dx \ = \mathrm{si}x + C,$$

- интегрални косинус

$$\int \frac{cosx}{x}dx \ = \mathrm{ci}x + C.$$ [11]

[11] Дефиниције ових типова интеграла видјети у Б. Војводић и В. Владичић, *Математика II*, Поглавље 2.6.

Интеграли облика

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx, \qquad \int \frac{x^n}{\ln x}dx, \qquad \int \frac{sinx}{x^n}dx, \qquad \int \frac{cosx}{x^n}dx, \qquad n = 1,2,\ldots$$

се могу свести на напријед наведене основне типове „нерјешивих“ интеграла.

Нееелементарне функције су и интеграли биномног диференцијала осим у три случаја када се могу свести на интеграл рационалне функције.

Један од типова интеграла који нису увијек елементарне функције су и елептички интеграли, тј. интеграли облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}\right)dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right)dx$$

гдје је R рационална функција. Ови интеграли у неким случајевима могу да буду елементарне функције и тада кажемо да су то псеудоелиптички интеграли. Елиптички интеграли се могу свести на три основна облика, од којих су најдетаљније изучени интеграли облика

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2sin^2x}}, \qquad \int \sqrt{1 - k^2sin^2x}\,dx, \;\; k \in (0,1)$$

који се примјењују у многим теоријским и практичним проблемима.