УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

МАТЕМАТИКА 2- ПРЕДАВАЊА

Академска 2022/2023

ТЕМА 2: ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

2.1. Дефиниција одређеног интеграла

2.2. Интеграбилност неких класа функција

2.3. Особине одређеног интеграла

2.4. Смјена промјенљиве. Парцијална интеграција

2.5. Примјене одређеног интеграла

2.6. Несвојствени интеграл

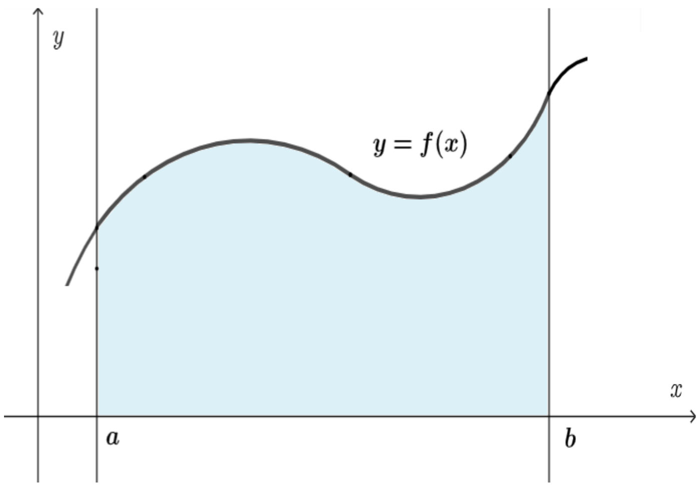
ЛИТЕРАТУРА: **Биљана Војводић, Владимир Владићић: Математика II, Машински факултет, Бања Лука, 2022**

НАСТАВНИК: **проф. др Биљана Војводић**

ТЕМА 2: ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

2.1. ДЕФИНИЦИЈА ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

До појма **одређеног интеграла** доводи нас проблем одређивања површине [1] фигуре у равни. Нека је функција f позитивна и непрекидна на $[a,b]$. Фигура ограничена кривом $y=f(x)$, правим $x=a, x=b$ и $y=0$ назива се **криволинијски трапез** над $[a,b]$, Слика 2.1.



Слика 2.1

Подијелимо интервал $[a,b]$ тачкама

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Тачкама $x_k,\ k=0,1,\dots n$ дефинисана је једна **подјела интервала** $[a,b]$, коју означавамо са P.

Са Δx_k означимо дужину интервала $[x_k, x_{k+1}]$, тј.

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \quad k = 0,1,\dots n-1.$$

Изаберимо у сваком сегменту $[x_k, x_{k+1}]$ произвољну тачку $\xi_k,\ k=0,1,\dots n-1$.

На овај начин се добија **подјела сегмента са истакнутим тачкама** коју означавамо са (P,ξ).

[1] Иако појам површине није тешко интуитивно разумјети, у математици овај појам има прецизну дефиницију. За почетак се дефинише површина многоугла. Дефиниција површине произвољне фигуре у равни заснива се на одређивању површина многоуглова који су уписани, односно описани око те фигуре и одређивању њиховог супремума $\underline{P}$ и инфимума $\overline{P}$, респективно. Каже се да фигура има површину (мјерљива је) ако је $\underline{P} = \overline{P}$. Сви многоуглови су мјерљиве фигуре. Показује се да фигура има површину ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје описани и уписани многоуглови такви да је разлика њихових површина мања од ε.

Дефинишемо Риманове [2] интегралне суме.

Дефиниција 2.1. *Нека је функција* f *дефинисана на* $[a,b]$ *и нека је* (P,ξ) *подјела* $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ *сегмента* $[a,b]$ *са скупом истакнутих тачака* $\xi=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{n-1}\}$. *Збир*

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

се назива ***Риманова интегрална сума*** *функције* f *у односу на подјелу* (P,ξ).

Примјер 2.1. Одредити једну Риманову интегралну суму функције $f(x)=x$ на сегменту $[1,3]$.

Рјешење: Изаберимо подјелу сегмента на n једнаких дијелова.[3] Тада је $\Delta x_k=\frac{3-1}{n}=\frac{2}{n}$, па је

$$x_0=1,\qquad x_1=1+\frac{2}{n},\ \dots\ x_{n-1}=1+\frac{2(n-1)}{n},\qquad x_n=1+\frac{2n}{n}=3.$$

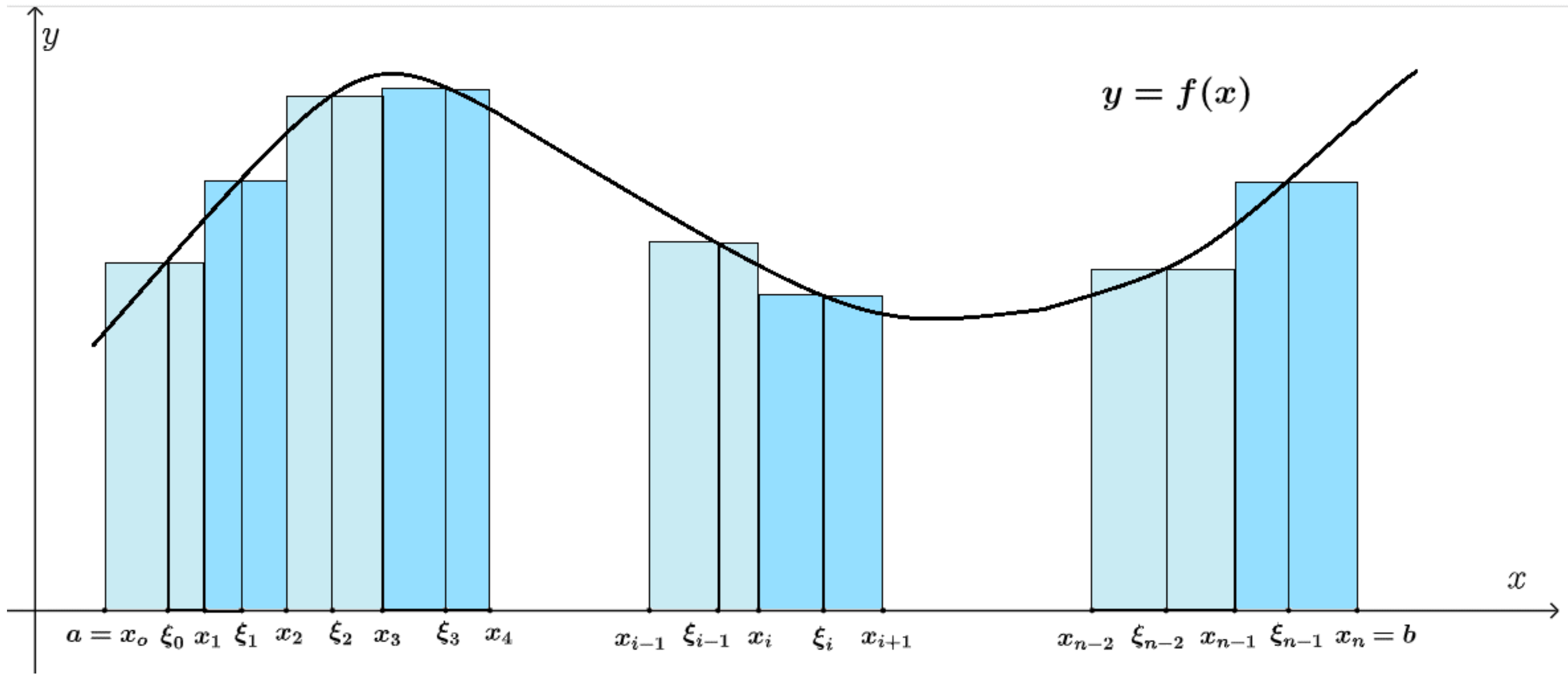
Изаберимо $\xi_k=x_k=1+\frac{2k}{n}, k=0,1,\dots n-1$ и добијамо интегралну суму

$$\sigma(f,P,\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)=\frac{2}{n}\left(n+\frac{2}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}\right)=\frac{2(2n-1)}{n}.\ \lozenge$$

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemman (1826-1866), њемачки математичар

[3] Таква подјела се назива **еквидистантна подјела** сегмента

Интегрална сума позитивне функције f представља збир површина правоугаоника страница Δx_k и $f(\xi_k)$, Слика 2.2. На основу интуитивног поимања појма површине, можемо закључити да је површина криволинијског трапеза приближно једнака интегралној суми $\sigma(f, P, \xi)$ и да што су странице правоугаоника Δx_k мање, то интегрална сума боље апроксимира његову површину.



Слика 2.2

Зато уводимо број

$$\lambda(P) = \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \Delta x_k$$

који називамо **параметар (норма) подјеле** P.

Уколико посматрамо гранични процес у коме параметар подјеле тежи нули, интуитивно можемо закључити да би интегралне суме тежиле површини криволинијског трапеза. Ово разматрање нас води до дефиниције одређеног интеграла.

Дефиниција 2.2. *Нека је функција* f *дефинисана на* $[a, b]$. *Ако постоји реалан број* I *такав да за произвољно* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *тако да за сваку подјелу сегмента* $[a, b]$ *са скупом истакнутих тачака* (P, ξ) *која испуњава услов* $\lambda(P) < \delta$ *вриједи неједнакост*

$$|\sigma(f, P, \xi) - I| < \varepsilon,$$

тада кажемо да је функција f ***интеграбилна или Риман интеграбилна*** *на сегменту* $[a, b]$ *и број* I *називамо* ***одређеним или Римановим интегралом*** *функције* f *на* $[a, b]$, *при чему користимо ознаку*

$$I = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.1}$$

Функцију f називамо **подинтегрална функција** одређеног интеграла (2.1). Број a је **доња** а број b **горња граница** одређеног интеграла (2.1).

Примједба 2.1. Одређени интеграл се понекад дефинише помоћу једнакости

$$I = \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) \tag{2.2}$$

при чему треба напоменути да се овдје не ради о класичној граничној вриједности.[4]

[4] Видјети Примједбу 2.2 у Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*

Одређени интеграл интеграбилне функције је јединствено одређен.

Теорема 2.1. *Ако је функција* f *интеграбилна на* $[a, b]$, *тада је вриједност* $I = \int_a^b f(x)dx$ *јединствено одређена.*

Ограниченост функције је потребан услов за њену интеграбилност.

Теорема 2.2. *Свака интеграбилна функција на* $[a, b]$ *је ограничена на* $[a, b]$.

Доказ: Претпоставимо супротно, тј. да је функција f неограничена на $[a, b]$. Тада за произвољну подјелу P сегмента $[a, b]$, постоји сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ за неко $i \in \{0,1, \dots, n-1\}$ на којем је функција неограничена. На преосталим сегментима $[x_k, x_{k+1}]$ за $k \neq i$ изаберимо произвољно истакнуте тачке ξ_k и означимо збир

$$\sigma^i = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Нека је $K > 0$ произвољан. Пошто је f неограничена на $[x_i, x_{i+1}]$, постоји $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ тако да

$$|f(\xi_i)| \geq \frac{|\sigma^i| + K}{\Delta x_i}.$$

Формирајмо интегралну суму за дату подјелу P и истакнуте тачке $\{\xi_0, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n-1}\}$

$$\sigma(f, P, \xi) = \sigma^i + f(\xi_i)\Delta x_i.$$

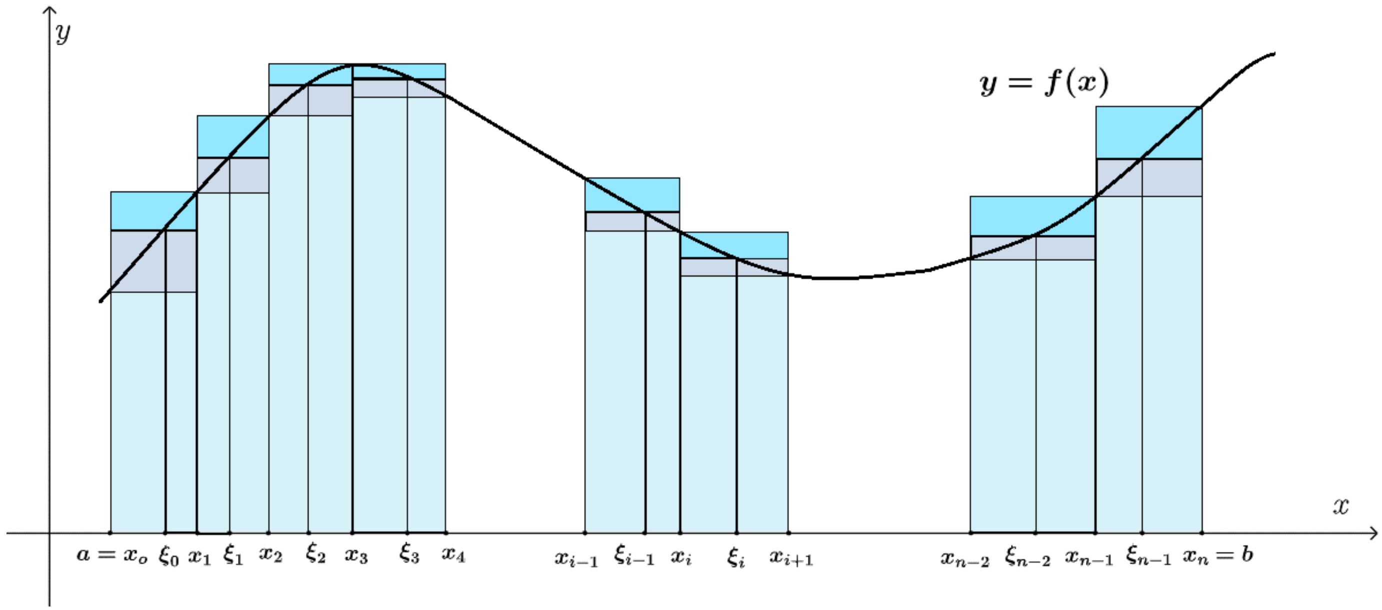
Тада је
$$|\sigma(f,P,\xi)| = \left|\sigma^i + f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geq |f(\xi_i)|\Delta x_i - \left|\sigma^i\right| \geq \left|\sigma^i\right| + K - \left|\sigma^i\right| = K.$$
Одавде закључујемо да је интегрална сума неограничена за произвољну подјелу P што је контрадикција са претпоставком да је функција интеграбилна на $[a,b]$. Дакле, функција f мора бити ограничена на $[a,b]$. □

Примјер 2.2. Функција $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \in (0,1] \\ 0, x = 0 \end{cases}$ није интеграбилна на $[0,1]$, јер на том сегменту није ограничена. ◊

У ускmatch вези са Римановом интегралном сумом (2.1) су **Дарбуове**[5] **суме**.

Дефиниција 2.3. *Нека је функција f ограничена на $[a,b]$ и нека је $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ једна подјела сегмента $[a,b]$. Нека је*
$$m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \qquad M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x), \qquad k = 0,1,\dots,n-1.$$
Суме
$$s(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \qquad S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$
*зовемо **доња и горња Дарбуова сума** функције f на $[a,b]$, респективно.*

[5] Jean-Gaston Darboux (1842 – 1917), француски математичар



Слика 2.3

Доња Дарбуова сума представља суму површина правоугаоника који су уписани у криволинијски трапез, док горња Дарбуова сума представља суму површина правоугаоника описаних око криволинијског трапеза.

Јасно је да за произвољне тачке ξ_k из сегмента $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1, \dots n-1$, вриједи

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$$

одакле добијамо однос између Риманове и Дарбуових сума, Слика 2.3:

$$s(f,P) \leq \sigma(f,P,\xi) \leq S(f,P).$$

У сљедећој теореми се помоћу Дарбуових сума формулишу потребни и довољни услови да би функција била интеграбилна на сегменту.

Теорема 2.3. *Ограничена функција f је интеграбилна на $[a,b]$ ако и само ако за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за сваку подјелу P сегмента $[a,b]$ са особином $\lambda(P) < \delta$ вриједи*

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Примјер 2.3. Испитати да ли је функција $f(x) = x$ из Примјера 2.1 интеграбилна на $[1,3]$.

Рјешење: Пошто је функција f растућа на сегменту $[1,3]$ имамо да је за $k = 0,1, \dots n-1$

$$m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = x_k \qquad M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) = x_{k+1}.$$

Дакле,

$$s(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k\,, \qquad S(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} \Delta x_k$$

па је

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Пошто је $\lambda(P) = \max_{k=0,1,\dots,n-1} \Delta x_k$ јасно је да је

$$x_{k+1} - x_k \leq \lambda(P), \qquad k = 0,1,\dots,n-1.$$

Према томе

$$S(f,P) - s(f,P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\lambda(P) =$$

$$\lambda(P)(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}) = \lambda(P)(x_n - x_0) = \lambda(P)(b-a).$$

Одавде добијамо да је за произвољно $\varepsilon > 0$ и за $\lambda(P) < \delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$ испуњен услов

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon,$$

па је на основу Теореме 2.3. функција интеграбилна.

2.2. ИНТЕГРАБИЛНОСТ НЕКИХ КЛАСА ФУНКЦИЈА

Разматрамо довољне услове за интеграбилност функције. У доказима се користе познати резултати из математичке анализе који се односе на особине непрекидних функција: Вајерштрасова, Коши-Болцанова и Канторова теорема.[6]

Теорема 2.4. *Свака непрекидна функција на* $[a, b]$ *је интеграбилна на* $[a, b]$.

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Пошто је f непрекидна на $[a, b]$ она је на основу Канторове теореме на том сегменту и равномјерно непрекидна, па постоји $\delta > 0$ такво да вриједи

$$(\forall u, v \in [a, b])|u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Нека је $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ подјела сегмента $[a, b]$ таква да је $\lambda(P) < \delta$. Пошто је f непрекидна на $[a, b]$, на основу Вајерштрасове теореме постоје $u_k, v_k \in [x_k, x_{k+1}]$ тако да је $m_k = f(u_k)$, $M_k = f(v_k)$, најмања, односно највећа вриједност функције на $[x_k, x_{k+1}], k = 0, \dots, n - 1$. Пошто је $|u_k - v_k| \leq x_{k+1} - x_k \leq \lambda(P) < \delta$ добијамо

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \big(f(v_k) - f(u_k)\big)\Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \Delta x_k = \varepsilon.$$

Одавде, на основу Теореме 2.3, добијамо да је функција f интеграбилна на $[a, b]$. □

[6] Видјети Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*

Непрекидност функције јесте довољан, али не и потребан услов за њену интеграбилност. Показује се да је и функција која има коначно много тачака прекида прве врсте на $[a, b]$ интеграбилна на $[a, b]$. Вриједи сљедећа теорема. [7]

Теорема 2.5. *Ако функција f има коначно много тачака прекида прве врсте на $[a, b]$, тада је f интеграбилна на $[a, b]$.*

Може се показати да за функције f и g које су интеграбилне на сегменту $[a, b]$ и које се разликују само у коначно много тачака, вриједи једнакост њихових интеграла на $[a, b]$, тј.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$ [8]

Једна од класа интеграбилних функција су и **монотоне функције.**

Теорема 2.6. *Нека је $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ монотона функција. Тада је f интеграбилна на $[a, b]$.*

Доказ: Видјети Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*.

[7] Функција може имати и бесконачно много тачака прекида па да ипак буде интеграбилна. Заправо вриједи да је ограничена функција интеграбилна на $[a, b]$ ако и само ако се скуп тачака прекида функције f на $[a, b]$ за свако $\varepsilon > 0$ може покрити са пребројиво много отворених интервала чија укупна дужина није већа од ε.
[8] Видјети задатке 8. и 9. из 2.3. Особина одређеног интеграла у Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*.

2.3. ОСОБИНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Теорема 2.7. *1) Ако су функције* f *и* g *интеграбилне на* $[a,b]$, *тада је на* $[a,b]$ *интеграбилна и функција* $\alpha f+\beta g, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *и вриједи*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

2)Ако је f *интеграбилна на* $[a,b]$ *и* $c\in(a,b)$, *тада је* f *интеграбилна на* $[a,c]$ *и* $[c,b]$ *и вриједи*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

3) Ако је f *интеграбилна на* $[a,b]$ *и* $f(x)\geq 0$ *за* $x\in[a,b]$, *тада је*

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0.$$

4) Ако су f *и* g *интеграбилне на* $[a,b]$ *и ако је* $f(x)\leq g(x)$ *за* $x\in[a,b]$, *тада је*

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx.$$

5) Ако је функција f *интеграбилна на* $[a,b]$, *тада је на* $[a,b]$ *интеграбилна и функција* $|f|$ *и вриједи*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказ: 1) Ова особина се односи на **линеарност одређеног интеграла** а слиједи директно из линеарности интегралних сума.

2) Ова особина се зове **особина адитивности одређеног интеграла** у односу на интервал интеграције. За доказ ове особине на почетку се показује да је функција која је интеграбилна на $[a,b]$ интеграбилна и на сваком сегменту који је подскуп од $[a,b]$. Дакле, f је интеграбилна на $[a,c]$ и $[c,b]$, $c \in (a,b)$. Нека је дат низ подјела на $[a,b]$ тако да свака подјела у истакнутим тачкама садржи c као једну тачку подјеле. Тада постоји $i \in \{0,\dots,n-1\}$ тако да је $c = x_i$, па је

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{i-1} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=i}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Прва интегрална сума на десној страни у горњој једнакости одговара интегралу функције f на $[a,c]$ а друга интегралу функције f на $[c,b]$, одакле слиједи једнакост 2).

3) Ако је $f(x) \geq 0$ за $x \in [a,b]$, тада су све интегралне суме ненегативне па и одређени интеграл мора бити ненегативан. Ова особина се назива **монотоност одређеног интеграла**.

4) Из особине линеарности и особине монотоности одређеног интеграла добијамо

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

5) Пошто је $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ из линеарности и особине 4) добијамо

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx\,. \square$$

Примједба 2.3. Из особине 3) у Теореми 2.7 знамо да је интеграл ненегативне функције на $[a, b]$ такође ненегативан. У случају **непрекидне и ненегативне** функције за коју постоји тачка $c \in [a, b]$ у којој је $f(c) > 0$, вриједи знак строге неједнакости, тј.

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Примјер 2.4. Упоредити вриједности сљедећих интеграла без израчунавања

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10}xdx \qquad \text{и} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx.$$

Рјешење: За $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имамо $sin^{10}x \leq sin^2x,$ па је функција

$$f(x) = sin^2x - sin^{10}x$$

ненегативна на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Пошто је функција f и непрекидна на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и нпр. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{15}{32} > 0$, на основу Примједбе 2.3 добијамо да је њен интеграл позитиван, тј.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2x - sin^{10}x)dx > 0.$$

Одавде, коришћењем линеарности одређеног интеграла добијамо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{10}xdx. \ \lozenge$$

2.3.1. Теорема о средњој вриједности интегралног рачуна

Теорема 2.8. (Теорема о средњој вриједности интегралног рачуна) *Нека су функције* f *и* g *интеграбилне на сегменту* $[a,b]$, *при чему је* $g(x) \geq 0$ $(g(x) \leq 0)$ за $x \in [a,b]$ *и нека је* $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *и* $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Тада постоји* $\mu \in [m,M]$ *такав да је*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{2.3}$$

Ако је функција f *још и непрекидна на* $[a,b]$, *онда постоји* $c \in (a,b)$ *такво да је*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx. \tag{2.4}$$

Доказ: Без ограничења општости можемо претпоставити да је $g(x) \geq 0$. Користећи монотоност одређеног интеграла можемо закључити да тада вриједи $\int_a^b g(x)dx \geq 0$.

1) Докажимо једнакост (2.3). Пошто је за све $x \in [a,b]$

$$m \leq f(x) \leq M \ \wedge \ g(x) \geq 0 \Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

На основу Теореме 2.7 одавде добијамо

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Ако је $\int_a^b g(x)dx = 0$ онда из горње неједнакости имамо да је и $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ па вриједи једнакост (2.3). Ако је $\int_a^b g(x)dx > 0$ тада за

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

вриједи $m \leq \mu \leq M$ и једнакост (2.3).

2) Претпоставимо сада да је функција f непрекидна и докажимо једнакост (2.4). Ако је $\int_a^b g(x)dx = 0$, тада је за произвољно $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx = 0$$

тј. вриједи једнакост (2.4). У наставку препостављамо да је $\int_a^b g(x)dx > 0$. На основу Вајерштрасове теореме познато је да постоје тачке из сегмента $[a, b]$ у којима функција узима вриједности m и M, али исто тако, на основу Коши-Болцанове теореме о међувриједности, и све вриједности из сегмента $[m, M]$. Према томе, постоји $c \in [a, b]$ тако да је $f(c) = \mu$. Показује се да се тачка c са овом особином налази у интервалу (a, b).[9] Доказ је идентичан и у случају да једнакост (2.4) вриједи за $c = b$. Теорема је доказана. □

Стављајући у Теореми 2.8 да је $g(x) = 1$, $x \in [a, b]$ добија се сљедећа посљедица.

[9] Видјети Биљана Војводић и Владимир Владичић, *Математика II*, доказ Теореме 2.7.

Посљедица 2.1. *Нека је функција* f *интеграбилна на сегменту* $[a,b]$ *и нека је* $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *и* $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. *Тада постоји* $\mu \in [m,M]$ *такав да је*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

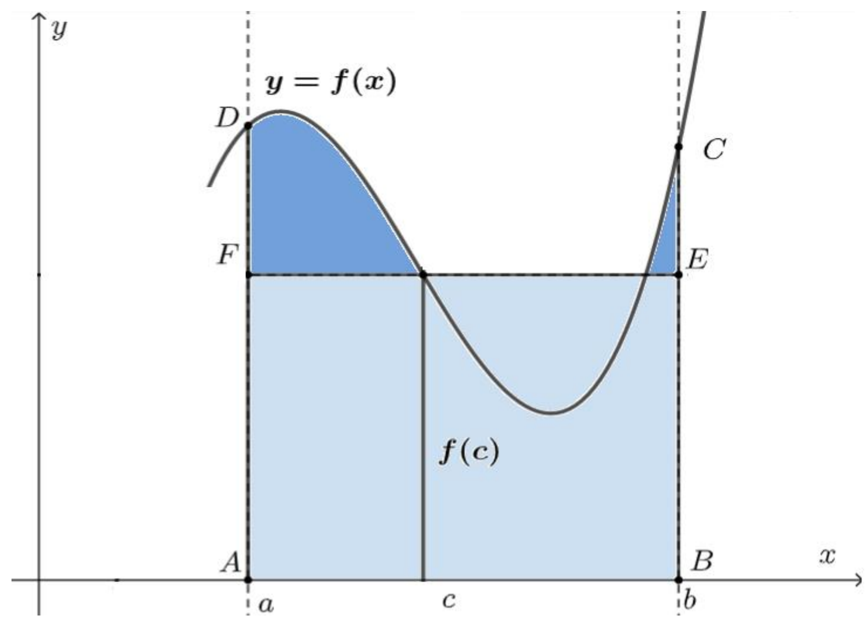
Ако је функција f *још и непрекидна на* $[a,b]$, *онда постоји* $c \in (a,b)$ *такво да је*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{2.5}$$

Једнакост (2.5) има једноставно геометријско тумачење.

На Слици 2.4 приказан је график функције $y = f(x)$ и права $y = f(c),\ c \in (a,b)$.

Једнакост (2.5) говори о томе да су површине криволинијског трапеза $ABCD$ и правоугаоника $ABEF$ једнаке.



Слика 2.4

2.3.2. Веза између неодређеног и одређеног интеграла

Наредне двије теореме се називају **Фундаменталне теореме интегралног рачуна** и описују везу између одређеног и неодређеног интеграла. Прва од њих описује неодређени интеграл помоћу одређеног интеграла.

Теорема 2.9. *Нека је f непрекидна на $[a,b]$. Тада је функција F дефинисана на $[a,b]$ са*

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

примитивна функција функције f.

Доказ: Нека $x, x+h\in(a,b)$. Из особине адитивности одређеног интерала имамо

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Коришћењем Посљедице 2.1 добијамо да постоји $\theta\in(0,1)$ тако да вриједи

$$\int_x^{x+h} f(t)dt=(x+h-x)f(x+\theta h)\Rightarrow F(x+h)-F(x)=hf(x+\theta h).$$

Одавде, на основу непрекидности функције f, добијамо

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x),\ \text{тј.}\ \ F'(x)=f(x).\ \square$$

Примједба 2.4. Из Теореме 2.9 добијамо формулу за диференцирање интеграла по горњој граници:

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x) \tag{2.6}$$

Примјер 2.7. За функцију $F(x) = \int_1^x e^{-t^2}dt$ је $F'(x) = e^{-x^2}$. ◊

Помоћу друге фундаменталне теореме, тј. Њутн-Лајбницове[10] формуле, одређени интеграл се израчунава помоћу произвољне примитивне функције.

Теорема 2.10. *Нека је функција* f *непрекидна на* $[a, b]$ *и* F *њена примитивна функција на* $[a, b]$. *Тада је*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2.7}$$

Доказ: Из Теореме 2.9 и Леме 1.1 добијамо да свака примитивна функција има облик

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad x \in [a, b]$$

гдје је C произвољна константа. Одавде за $x = a$ добијамо $F(a) = C$ док је за $x = b$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a)$$

тј. добијамо Њутн-Лајбницову формулу (2.7). □

[10] Isaac Newton (1642-1726/7), енглески физичар, математичар, астроном и филозоф;
Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646 -1716), њемачки филозоф, математичар и проналазач

Примједба 2.5. Користи се и ознака $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ помоћу које се формула (2.7) обично записује у облику

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Примјер 2.8. Израчунати интеграле:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx,$ б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx.$

Рјешење: а) Примјеном Њутн-Лајбницове формуле добијамо

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

б) Формалном примјеном Њутн-Лајбницове формуле добили бисмо

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln|x|\,\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Међутим, услови за примјену ове формуле нису испуњени јер подинтегрална функција има прекид у тачки $x = 0$. Штавише, функција $f(x) = \frac{1}{x}$ није интеграбилна на $[-1,1]$ јер на том сегменту није ограничена, што је на основу Теореме 2.3 потребан услов за интеграбилност. ◊

2.4. СМЈЕНА ПРОМЈЕНЉИВЕ. ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА

Основне методе интеграције у одређеном интегралу су, као и код неодређеног интеграла, метод смјене промјенљиве и метод парцијалне интеграције.

Теорема 2.11. (Смјена $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$) *Нека су испуњени сљедећи услови:*

1) функција f је непрекидна на $[a, b]$,

2) $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b], \quad \varphi(\alpha) = a, \;\; \varphi(\beta) = b,$

3) функција φ је непрекидно диференцијабилна на $[\alpha, \beta]$.

Тада је

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \tag{2.8}$$

Доказ: Из услова теореме добијамо да постоји примитивна функција $F(x)$ за функцију $f(x)$ на $[a, b]$, као и примитивна функција $\Phi(t)$ за функцију $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$. Вриједи сљедеће

$$F'(x) = \Big(F\big(\varphi(t)\big)\Big)' = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \; f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \; = \Phi'(t).$$

Одавде добијамо да је $F\big(\varphi(t)\big) = \Phi(t) + C, \quad t \in [\alpha, \beta]$, па вриједи

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt,$$

тј. формула (2.8). □

Примјер 2.9. Израчунати интеграл

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx.$$

Рјешење: Уведимо смјену $x=\varphi(t)=sint,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Уочимо да је $cost\geq 0$ за $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и да је $t=arcsinx$. Функција φ испуњава услове за смјену промјенљиве на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и добијамо

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-sin^2t}costdt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos^2tdt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2t)dt=\frac{\pi}{2}.\Diamond$$

Слично доказу претходне теореме доказујемо и теорему о смјени промјенљиве $\varphi(x)=t$.

Теорема 2.12. (Смјена $\boldsymbol{\varphi(x)=t}$) *Нека су испуњени сљедећи услови:*

1) функција f је непрекидна на $[a,b]$,

2) $\varphi:[a,b]\to[\alpha,\beta],\quad \varphi(a)=\alpha,\quad \varphi(b)=\beta$,

3) φ је непрекидно диференцијабилна функција која има инверзну функцију $\varphi^{-1}=\psi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$.

Тада је

$$\int_{a}^{b}f\big(\varphi(x)\big)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\psi'(t)dt. \tag{2.9}$$

Примјер 2.10. Да ли је исправан сљедећи поступак: смјеном $sinx = t, dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ добијамо

$$\int_0^{5\pi/6} sinxdx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}?$$

Рјешење: Поступак није исправан што можемо провјерити примјеном Њутн-Лајбницове формуле. Функција $\varphi(x) = sinx$ нема инверзну функцију на сегменту $[0{,}5\pi/6]$ јер није инјективна на интервалу $[0{,}5\pi/6]$ (нпр. $sin\frac{\pi}{3} = sin\frac{2\pi}{3}$), па се Теорема 2.12 није могла примијенити на овај начин. Исправан поступак за примјену формуле (2.9) би био да се интервал $[0{,}5\pi/6]$ подијели на два дијела на којима је функција $\varphi(x) = sinx$ монотона, самим тим и инјективна. Зато интеграл представљамо у облику збира два интеграла који испуњавају овај услов: $\int_0^{\pi/2} sinxdx$ и $\int_{\pi/2}^{5\pi/6} sinxdx$.

За први интеграл имамо

$$sinx = t, \qquad x = 0 \Rightarrow t = 0, \qquad x = \pi/2 \Rightarrow t = 1, \qquad dx = \frac{dt}{cosx} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

а за други, због непозитивности функције $cosx$ на $[\pi/2\,, 5\pi/6]$,

$$sinx = t, \qquad x = \pi/2 \Rightarrow t = 1, \qquad x = 5\pi/6 \Rightarrow t = 1/2\,, \qquad dx = \frac{dt}{cosx} = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Дакле,

$$\int_0^{5\pi/6} sinxdx = \int_0^{\pi/2} sinxdx + \int_{\pi/2}^{5\pi/6} sinxdx =$$

$$\int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} - \int_1^{1/2} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1 + \sqrt{1-t^2}\Big|_1^{1/2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \lozenge$$

Одређивање интеграла парних или непарних функција на симетричном интервалу интеграције можемо поједноставити свођењем на интеграцију на половини интервала интеграције, што је резултат који слиједи и из геометријске интерпретације одређеног интеграла у смислу површине криволинијског трапеза. Наредна лема описује ову особину одређених интеграла.

Лема 2.3. *Нека је f непрекидна функција на сегменту* $[-a, a]$.

1) *Ако је f парна функција, тада је*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

2) *Ако је f непарна функција, тада је*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Доказ: Коришћењем особине адитивности одређеног интеграла добијамо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$$

Увођењем смјене $x = -t$ у првом интегралу добијамо

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (f(x) + f(-x))dx.$$

Ако је f парна функција тада је

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 2f(x),$$

а ако је f непарна тада је

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0$$

и лема је доказана. □

Ако су функције f и g интеграбилне на $[a, b]$, може се показати да је тада на $[a, b]$ интеграбилна и функција $f \cdot g$, као и функција $\frac{f}{g}$ $\left(\inf\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| > 0\right)$. Међутим, интеграл производа (количника) није једнак производу (количнику) интеграла.

Аналогно као у случају неодређеног интеграла, веза између одређеног интеграла и операције множења се успоставља помоћу парцијалне интеграције.

Теорема 2.13. (Парцијална интеграција) *Ако функције u и v имају непрекидне изводе на $[a, b]$, тада важи*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (2.10)$$

Доказ: Из $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ примјеном Њутн-Лајбницове формуле добијамо

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x)|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

тј. формулу за парцијалну интеграцију (2.10). □

Формула (2.10) се обично записује у облику

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x)$$

и примјењује на сличан начин као код неодређеног интеграла.

Примјер 2.11. Израчунати интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin2xdx.$$

Рјешење:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsin2xdx = \begin{vmatrix} u = x & dv = sin2xdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}cos2x \end{vmatrix} =$$

$$-\frac{x}{2}cos2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}sin2x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \square$$

2.5. ПРИМЈЕНЕ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

❖ Површина фигуре у равни

Нека је функција f ненегативна и непрекидна на $[a, b]$. Из дефиниције одређеног интеграла добија се да одређени интеграл функције на $[a, b]$ представља површину криволинијског трапеза над $[a, b]$, Слика 2.1. Дакле,

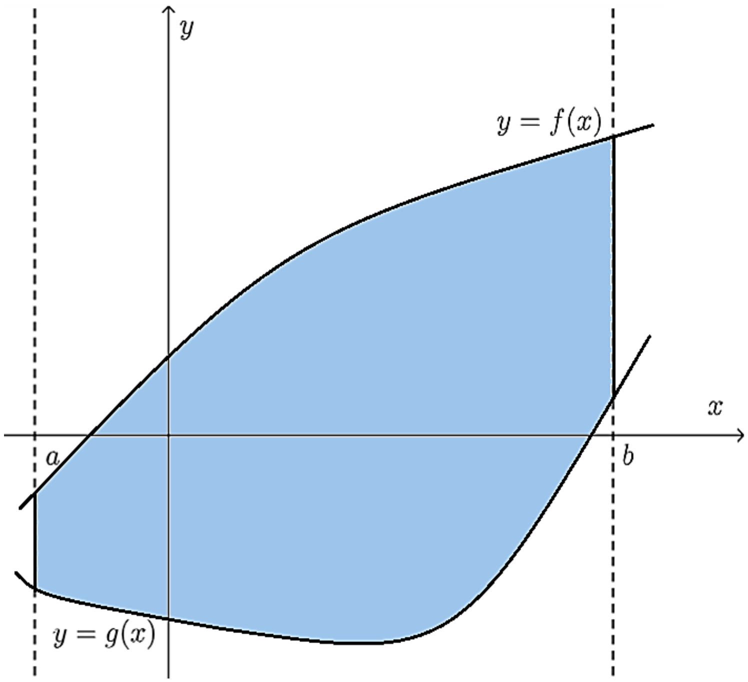
$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

Када је функција f непозитивна и непрекидна на $[a, b]$ тада површину криволинијског трапеза над $[a, b]$ одређујемо помоћу једнакости

$$P = -\int_a^b f(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx.$$

То значи да приликом одређивања површине криволинијског трапеза над $[a, b]$ вршимо подјелу интервала интеграције на дијелове на којима је функција f или ненегативна или непозитивна и користимо претходно разматрање.

Нека су сада функције f и g непрекидне на $[a, b]$ и $g(x) \leq f(x)$ за $x \in [a, b]$, Слика 2.5.



Слика 2.5.

Из формуле за површину криволинијског трапеза добијамо да је површина фигуре ограничене графицима функција $f(x)$ и $g(x)$ и правама $x = a$ и $x = b$ једнака

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Уочимо да у овом случају знак функција f и g не утиче на израчунавање површине јер их увијек можемо транслатирати дуж y-осе тако да добијемо фигуру која се налази изнад x-осе.

Нека је крива $y = f(x)$ задата помоћу параметра

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

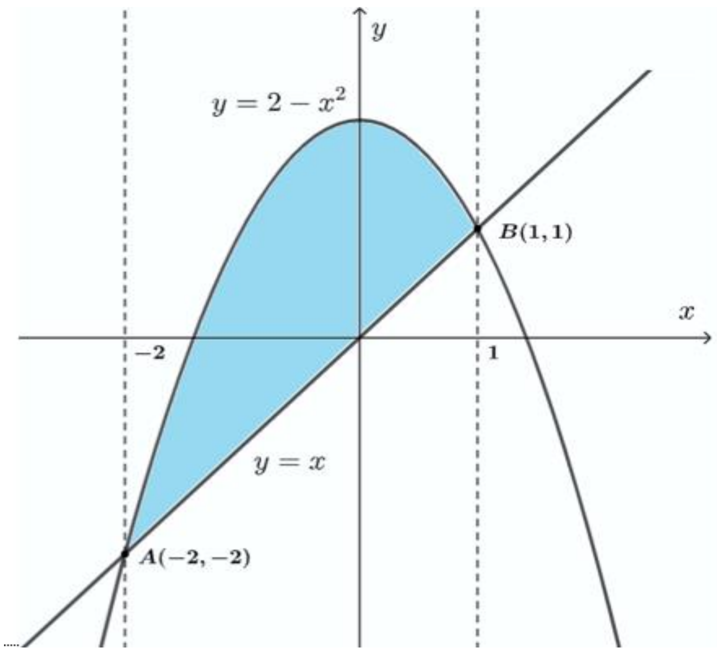
гдје су x и y непрекидно диференцијабилне функције на сегменту $[\alpha, \beta]$. Тада се површина криволинијског трапеза који је ограничен графиком ове криве, x −осом и правама $x = x(\alpha)$ и $x = x(\beta)$ одређује помоћу формуле

$$P = \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\, dt. \tag{2.11}$$

Примјер 2.12. Израчунати површину фигуре у равни ограничене правом $y = x$ и параболом $y = 2 - x^2$.

Рјешење: Да бисмо одредили границе интеграције потребно је одредити пресјечне тачке праве и параболе. Из система једначина $y = x \wedge y = 2 - x^2$ добијамо $x_1 = -2,\ x_2 = 1$ и то су уједно границе интеграције, Слика 2.6. Имамо

$$P = \int_{-2}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-2}^{1} \left((2 - x^2) - x\right)dx = \frac{9}{2}.$$



Слика 2.6.

Површину смо могли израчунати узимајући да је y независна промјенљива.

Са слике се види да се у том случају површина састоји из два дијела, и да је за $-2 \leq y \leq 1$ доња граница лијеви крак параболе а горња права, док је за $1 \leq y \leq 2$ доња граница лијеви крак параболе а горња десни крак параболе. Дакле

$$P = \int_{-2}^{1} \left(y - \left(-\sqrt{2-y}\right)\right)dy + \int_{1}^{2} \left(\sqrt{2-y} - \left(-\sqrt{2-y}\right)\right)dy = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{2}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-2}^{1} - \frac{4}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{1}^{2} = \frac{9}{2}.\ \lozenge$$

❖ Дужина лука криве

Проблем одређивања дужине лука криве се назива **ректификација.** Криве за које је могуће одредити дужину лука криве називају се **ректификабилне криве.** [11]

Ако је крива одређена параметарским једначинама

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

гдје су x и y непрекидно диференцијабилне функције, онда је крива ректификабилна и њена дужина износи

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \tag{2.12}$$

Уколико је крива одређена функцијом $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ која има непрекидан извод на $[a, b]$, из (2.12) се једноставно добија формула за одређивање дужине лука криве између тачака са апсцисама a и b. Тада имамо параметризацију криве $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$ и уврштавањем у (2.12) добијамо да је дужина лука криве једнака

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{2.13}$$

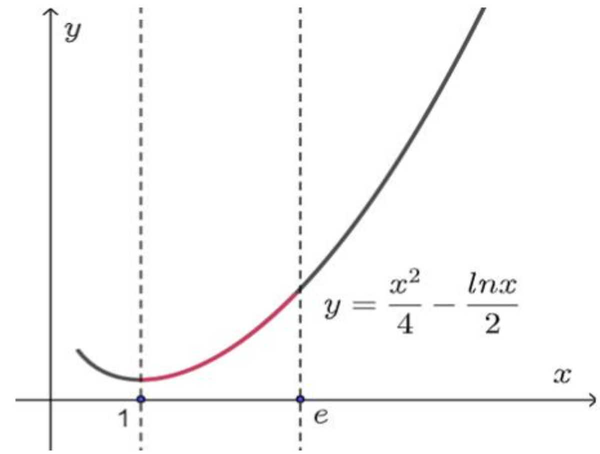
Примјер 2.14. Наћи дужину лука криве $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$ између тачака криве са апсцисама $x = 1$ и $x = e$.

[11] Може се показати да није могуће за сваку криву одредити дужину лука криве између одређених тачака.

Рјешење: График функције је дат на Слици 2.8. Примјењујемо формулу (2.13). Имамо

$$l = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_1^e \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1+e^2}{4}. \ \lozenge$$



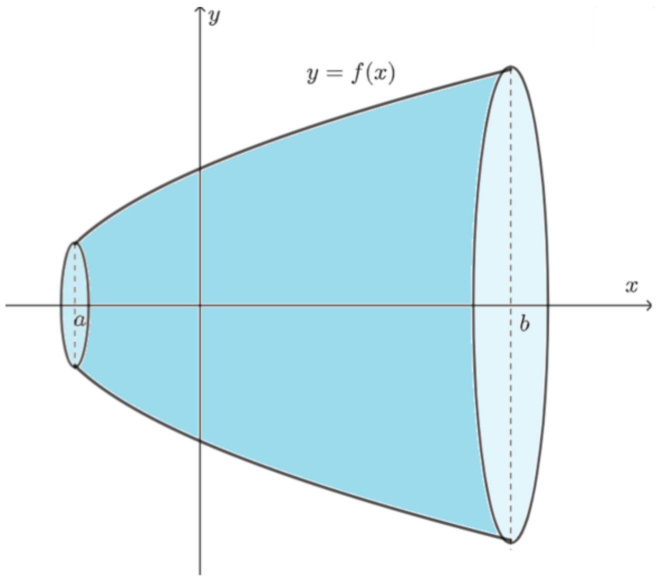
Слика 2.8

❖ Запремина ротационог тијела

Нека је функција f непрекидна и позитивна на $[a, b]$. Уколико криволинијски трапез ограничен графиком функције f, правама $x = a$, $x = b$ и x −осом, ротира око x −осе добија се ротационо тијело, Слика 2.9.

Показује се да је запремина тако добијеног тијела једнака

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$



Слика 2.9

Ако је функција задата параметарски у облику

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

при чему је функција x монотона и непрекидно диференцијабилна, тада је

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t)|x'(t)|dt.$$

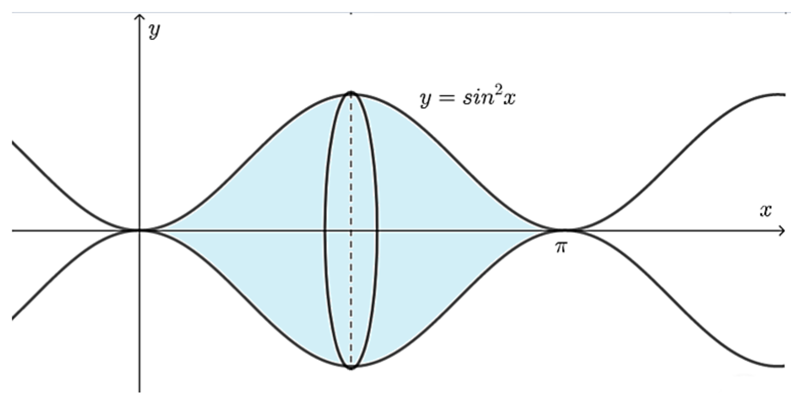
Примјер 2.15. Израчунати запремину тијела насталог ротацијом дијела равни ограниченог кривом $y = sin^2 x$, x −осом и правама $x = 0$ и $x = \pi$ око x −осе.

Рјешење: График функције $y = sin^2 x$ и тијела које настаје ротацијом око x −осе је представљен на Слици 2.10. Имамо

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^{\pi} sin^4 x dx =$$

$$\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} (1 - cos2x)^2 dx =$$

$$\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \left(1 - 2cos2x + \frac{1 + cos4x}{2}\right) dx = \frac{3}{8}\pi^2. \ \lozenge$$



Слика 2.10.

❖ Површина омотача ротационог тијела

Нека је функција f непрекидно диференцијабилна на $[a, b]$. Површ која ограничава ротационо тијело настало ротацијом криволинијског трапеза ограниченог графиком функције f, правама $x = a$, $x = b$ и $y = 0$ око x −осе, се састоји од двије базе (кругови полупречника $f(a)$ и $f(b)$) и омотача, Слика 2.9. Показује се да је површина омотача ротационог тијела дата са

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ако је функција задата у параметарском облику

$$x = x(t), \ \ y = y(t), \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

при чему су функције x и y непрекидно диференцијабилне, тада је површина омотача ротационог тијела дата са

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)|\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Примјер 2.17. Израчунати запремину и површину лопте полупречника r.

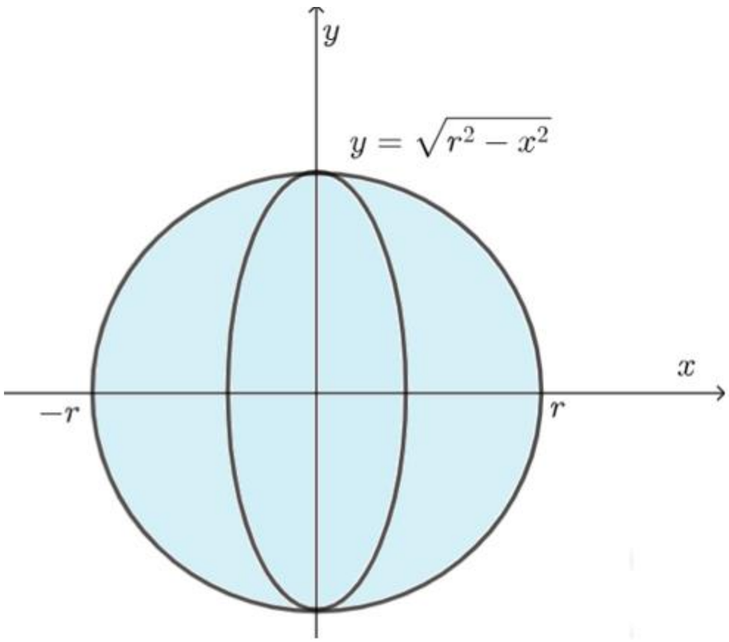
Рјешење: Лопта настаје обртањем полукруга

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \qquad -r \leq x \leq r$$

око $x -$ осе, Слика 2.12.

Имамо

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^r = 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}r^3\pi.$$



Слика 2.12

За одређивање површине сфере имамо

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

па је

$$S = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx =$$

$$2\pi r \int_{-r}^{r} dx = 4r^2\pi.$$

2.6. НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛИ

Показали смо да је за егзистенцију одређеног интеграла неопходно (не и довољно) да буду испуњена сљедећа два услова:

1) интервал интеграције $[a, b]$ је коначан, тј. $a, b \in R$ и
2) функција $f(x)$ је ограничена на скупу $[a, b]$.

Појам одређеног интеграла се може уопштити у случају када бар један од ова два услова није испуњен. Такво уопштење одређеног интеграла називамо **несвојствени интеграл.**

Прво дефинишемо несвојствени интеграл у случају када интервал интеграције није коначан, тј. када је бар једна од граница интеграла бесконачна. Обично се ови интеграли називају **несвојствени интеграли прве врсте**.

Дефиниција 2.4. *Нека је функција f дефинисана у интервалу $[a, +\infty)$ и интеграбилна на сваком сегменту $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Уколико постоји коначна гранична вриједност*

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

*тада ову граничну вриједност називамо **несвојствени интеграл** функције f на $[a, +\infty)$ и означавамо са*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

*Тада кажемо и да несвојствени интеграл **конвергира**. У супротном, када посматрана гранична вриједност није коначна, кажемо и да несвојствени интеграл **дивергира**.*

Дакле,

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Аналогно дефинишемо несвојствени интеграл функције f која је дефинисана на $(-\infty, b]$ и интеграбилна на сваком сегменту $[a, b] \subset (-\infty, b]$ са

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Примјер 2.18. Испитати конвергенцију интеграла

а) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, б) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

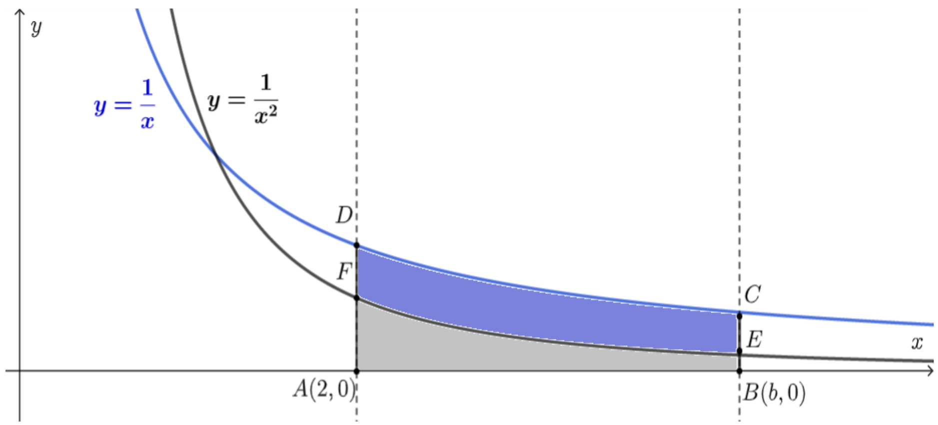
Рјешење:

а) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{2}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$

б) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} (\ln x)\Big|_{2}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 2) = +\infty.$ ◊

На Слици 2.13 су приказани графици функција $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{x}$, $x \geq 2$. Резултате из претходног примјера можемо геометријски интерпретирати на сљедећи начин.

Површина криволинијског трапеза $ABEF$ ограниченог кривом $y = \frac{1}{x^2}$ је дата интегралом $\int_2^b \frac{dx}{x^2}$. На основу конверегенције овог интеграла, закључујемо да та површина не може бити већа од $\frac{1}{2}$ ма како велико било b. Такође, закључујемо да када параметар b тежи ка $+\infty$, тада се криволинијски трапез $ABEF$ дегенерише у облик чија је површина једнака $\frac{1}{2}$.



Слика 2.13

С друге стране, површина криволинијског трапеза $ABCD$ ограниченог кривом $y = \frac{1}{x}$ је дата интегралом $\int_2^b \frac{dx}{x}$ и у овом случају, пошто интеграл дивергира, то значи да за произвољно велико M постоји b тако да је површина криволинијског трапеза $ABCD$ већа од M.

Дакле, криволинијски трапез $ABCD$ се дегенерише у облик који није мјерљив, тј. чија је површина једнака $+\infty$.

Помоћу несвојствених интеграла дефинишемо и неке од основних типова „нерјешивих“ интеграла. **Интегрални синус** ($si\ x$) и **интегрални ко**синус (ci x) који се појављују у примитивним функцијама „нерјешивих“ интеграла $\int \frac{sinx}{x} dx$ и $\int \frac{cosx}{x} dx$ дефинишу се помоћу несвојствених интеграла

$$\mathrm{si}\, x = -\int_x^{+\infty} \frac{sint}{t} dt, \quad x \geq 0, \qquad \mathrm{ci}\, x = -\int_x^{+\infty} \frac{cost}{t} dt, \quad x > 0.$$

У наставку дефинишемо несвојствени интеграл када су обје границе интеграције бесконачне.

Дефиниција 2.5. *Нека је функција* f *дефинисана на* $(-\infty,+\infty)$ *и интеграбилна на сваком сегменту* $[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$. *Ако за произвољан реалан број* c *несвојствени интеграли* $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ *и* $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ *конвергирају, тада несвојствени интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ *дефинишемо са*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

У овом случају кажемо и да несвојствени интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***конвергира.*** *У супротном, када бар један од несвојствених интеграла* $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ *и* $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ *дивергира, кажемо и да несвојствени интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***дивергира.***

Примјер 2.19. Испитати конвергенцију интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Рјешење:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{1}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$\lim_{a\to-\infty}(arctg1-arctga)+\lim_{b\to+\infty}(arctgb-arctg1)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Дакле, интеграл је конвергентан и вриједност му је π. Напомињемо да смо у овом примјеру изабрали да је $c=1$ али и у случају избора друге вриједности за параметар c дошли бисмо до истих закључака: да је посматрани интеграл конвергентан и да је његова вриједност π.◊

Несвојствене интеграле неограничених функција, који се обично називају **несвојствени интеграли друге врсте**, дефинишемо на сљедећи начин.

Дефиниција 2.6. *Нека је функција* f *дефинисана на интервалу* $[a,b)$ *и интеграбилна на сваком сегменту* $[a,\beta] \subset [a,b)$. *Уколико постоји коначна гранична вриједност*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

тада ову граничну вриједност називамо ***несвојствени интеграл*** *функције* f *на* $[a,b)$ *и означавамо са* $\int_a^b f(x)dx$. *У овом случају кажемо и да несвојствени интеграл* ***конвергира***. *У супротном, када посматрана гранична вриједност није коначна, кажемо и да несвојствени интеграл* ***дивергира***.

Дакле,

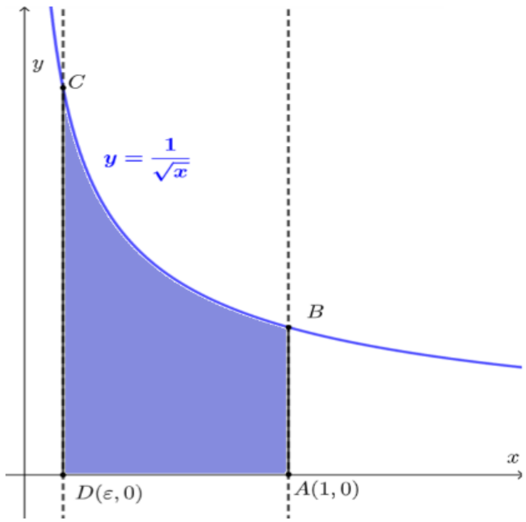
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Аналогно дефинишемо несвојствени интеграл функције f која је дефинисана на $(a,b]$ и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha,b] \subset (a,b]$ са

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Примјер 2.20. Испитати конвергенцију интеграла

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, б) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$.



Слика 2.14.

Рјешење:

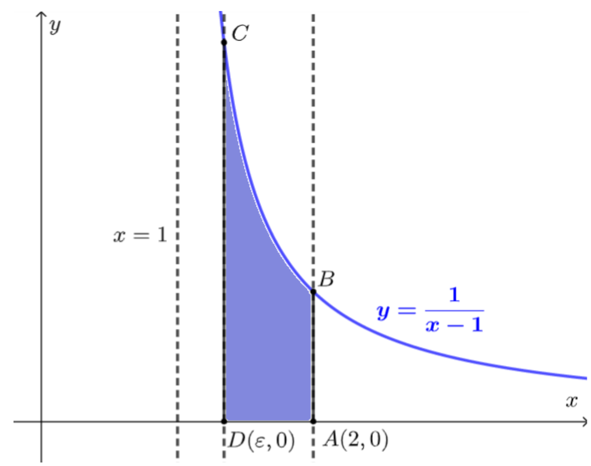
$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Геометријска интерпретација овог резултата је слична као код интеграла са бесконачним границама. Због конвергенције посматраног интеграла, површина криволинијског трапеза $ABCD$ ограниченог кривом $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ не може бити већа од 2, ма како мало било $\varepsilon > 0$. У случају када ε тежи нули, тада се криволинијски трапез $ABCD$ дегенерише у облик чија је површина једнака 2, Слика 2.14.

б) Имамо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = +\infty$$

па интеграл дивергира. У овом случају за произвољно велико M постоји $\varepsilon > 0$ тако да је површина криволинијског трапеза $ABCD$ већа од M. Криволинијски трапез $ABCD$ се дегенерише у облик који није мјерљив, Слика 2.15. ◊



Слика 2.15.

Сада дефинишемо несвојствене интеграле у случају када је подинтегрална функција неограничена и на доњој и на горњој граници интеграла.

Дефиниција 2.7. *Нека је функција f дефинисана на (a,b) и интеграбилна на сваком сегменту $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Ако несвојствени интеграли $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ конвергирају за произвољан број $c\in(a,b)$, тада несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ дефинишемо са*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

*У овом случају кажемо и да несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ **конвергира.** У супротном, када бар један од несвојствених интеграла $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$ дивергира, кажемо и да несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ **дивергира**.*

На крају дефинишемо несвојствене интеграле када је подинтегрална функција неограничена у једној од тачака унутар сегмента $[a,b]$.

Дефиниција 2.8. *Нека је функција* f *дефинисана на* (a,b) *и интеграбилна на сваком сегменту* $[a,\alpha] \subset [a,c)$ *и на сваком сегменту* $[\beta,b] \subset (c,b]$*. Уколико несвојствени интеграли* $\int_a^c f(x)dx$ *и* $\int_c^b f(x)dx$ *конвергирају, тада несвојствени интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *дефинишемо са*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

У овом случају кажемо и да несвојствени интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ***конвергира.*** *У супротном, када бар један од несвојствених интеграла* $\int_a^c f(x)dx$ *и* $\int_c^b f(x)dx$ *дивергира, кажемо и данесвојствени интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ ***дивергира****.*

Аналогно се дефинишене несвојствени интеграл у случају када унутар интервала интеграције постоји више тачака у којима подинтегрална функција није ограничена.

Примјер 2.21. Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Рјешење: Пошто подинтегрална функција није дефинисана у тачки 0, у питању је несвојствени интеграл. Имамо

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}.$$

За први интеграл на десној страни имамо

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln\varepsilon - \ln 1) = -\infty.$$

Одавде закључујемо да интеграл дивергира јер за конвергенцију морају да буду конвергентна оба интеграла на десној страни. Упоредити са Примјером 2.5 б). ◊

У већини задатака који се односе на несвојствене интеграле не захтијева се одређивање вриједности несвојственог интеграла (уколико је конвергентан), већ је довољно само испитати да ли је интеграл конвергентан или не. Због тога се, умјесто испитивања конвергенције на основу дефиниције, користе тврђења у којима се на основу особина подинтегралне функције описују потребни или довољни услови за конвергенцију интеграла.

Оваква тврђења се називају **критеријуми конвергенције несвојствених интеграла**.

Постоје разни критеријуми конвергенције несвојствених интеграла и без доказа наводимо један од њих, **поредбени критеријум**, који је врло једноставан за примјену. У овом критеријуму се, поред несвојственог интеграла чију конвергенцију испитујемо, посматра и интеграл који нам служи за поређење са датим интегралом.

Лема 2.4. *Нека је* $a < b \leq +\infty$. *Ако је* $0 \leq f(x) \leq g(x), x \in [a, b)$ *и ако су функције* f *и* g *интеграбилне на сваком сегменту* $[a, \beta] \subset [a, b)$, *тада вриједи:*

1) Ако интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *конвергира, тада конвергира и интеграл* $\int_a^b f(x)dx$.

2) Ако интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *дивергира, тада дивергира и интеграл* $\int_a^b g(x)dx$.

Примјер 2.22. Испитати конверегенцију несвојственог интеграла

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Рјешење: а) За $1 \leq x < \infty$ вриједи неједнакост $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Даље је

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}|_1^{\infty} = e^{-1}$$

тј. интеграл

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

конвергира. Одавде примјеном тврђења 1) из Леме 2.4 добијамо да и интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ конвергира.