Школска година: **2018/19** **Универзитет у Бањој Луци**

Машински факултет

Пријемни испит 2. 7. 2018. године – рјешења задатака

1. Вриједност израза

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

је (заокружити тачан одговор)

а) -1 б) $\frac{ab}{a+b}$ в) 0 г) $\frac{b-a}{ab}$.

Навести услове под којима вриједи једнакост.

Рјешење: Имамо

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{b-a}{ab}:\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{b-a}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(b-a)(b+a)}=\frac{ab}{a+b}.$$

Тачан одговор је б).

Једнакост вриједи под условима $a\neq 0, b\neq 0, a\neq b, a\neq -b$.

2. Одредити вриједности реалног параметра a тако да квадратна једначина

$$(a-2)x^2+(a-5)x+1=0$$

има:

а) тачно један реалан позитиван корijен,

б) нема реалних коријена,

в) има два реална различита коријена.

Рјешење: Ако је $a=2$ добијамо линеарну једначину $-3x+1=0$ чије је рјешење $x=\frac{1}{3}$. За $a\neq 2$ имамо

$$D=(a-5)^2-4(a-2)=a^2-14a+33=(a-3)(a-11).$$

а) Квадратна једначина има тачно један коријен ако је $D=0$, тј. за $a=3$ или $a=11$. Тај коријен је једнак

$$x_1=x_2=-\frac{a-5}{2(a-2)}.$$

За $a=3$ добијамо $x_1=x_2=1$ и за $a=11$ је $x_1=x_2=-\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}$. Према томе, једначина има тачно један реалан позитиван коријен за $a\in\{2,3\}$.

б) Квадратна једначина нема реалних коријена ако је $D<0$, тј. за $a\in(3,11)$.

в) Квадратна једначина има два реална различита коријена ако је $D>0$, тј. за $a\in(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(11,+\infty)$.

3. Ријешити неједначину $\frac{4-3x}{x-2}\geq 2$.

Рјешење: Неједначина је дефинисана за $x\neq 2$. Вриједи

$$\frac{4-3x}{x-2}\geq 2\Leftrightarrow\frac{4-3x}{x-2}-2\geq 0\Leftrightarrow\frac{4-3x-2x+4}{x-2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{8-5x}{x-2}\geq 0.$$

x	$\left(-\infty,\frac{8}{5}\right)$	$\left(\frac{8}{5},2\right)$	$(2,+\infty)$
$8-5x$	$+$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\frac{8-5x}{x-2}$	$-$	$+$	$-$

Рјешење неједначине је $x\in\left[\frac{8}{5},2\right)$.

4. Одредити реалне бројеве x и y из једнакости $(1-2i)(x+3yi)=11+8i$.

Рјешење: Имамо

$$(1-2i)(x+3yi)=11+8i\Rightarrow x+3yi-2xi+6y=11+8i\Rightarrow$$
$$(x+6y)+(-2x+3y)i=11+8i.$$

Два комплексна броја су једнака ако и само ако имају једнаке реалне и имагинарне дијелове. Према томе добијамо систем

$$x + 6y = 11,$$
$$-2x + 3y = 8.$$

Множењем прве једначине са 2 и дадавњем другој добијамо

$$15y = 30$$

тј. $y = 2$. Уврштавњем у прву једначину система добијамо $x = -1$. Дакле, тражено рјешење је

$$x = -1, y = 2.$$

5. Ријешити тригонометријску једначину $cos2x = sinx$.

Рјешење: Пошто је $cos2x = cos^2x - sin^2x = 1 - sin^2x - sin^2x = 1 - 2sin^2x$ добијамо једначину

$$1 - 2sin^2x = sinx.$$

Увођењем смјене $sinx = t, t \in [-1,1]$ добијамо квадратну једначину

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

чија су рјешења $t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -1$.

Из $sinx = \frac{1}{2}$ добијамо $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, k, l \in \mathbb{Z}$.

Из $sinx = -1$ добијамо $x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$. Дакле, рјешење тригонометријске једначине је

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi, x = \frac{3\pi}{2} + 2m\pi, \qquad k, l, m \in \mathbb{Z}.$$

6. Ријешити неједначину $5^{x-1} + 7^{x-1} > 7^x - 5^x$.

Рјешење: Добијамо

$$5^{x-1} + 5^x > 7^x - 7^{x-1} \Rightarrow 5^{x-1}(1 + 5) > 7^{x-1}(7 - 1) \Rightarrow 6 \cdot 5^{x-1} > 6 \cdot 7^{x-1}.$$

Одавде дијељењем са $6 \cdot 7^{x-1}$ добијамо

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-1} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{x-1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{0}.$$

Пошто је експоненецијлна функција $f(x) = a^x$ опадајућа за $0 < a < 1$ из горње неједнакости ($a = \frac{5}{7}$) добијамо $x - 1 < 0$, тј. $x < 1$. Рјешење експоненцијалне неједначине је

$$x \in (-\infty, 1).$$

7. Ријешити једначину $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 2) = 2$.

Рјешење: Једначина је дефинисана за $x - 1 > 0$ и $x + 2 > 0$, тј. за $x > 1$. Из особина логаритама добијамо

$$\log_2(x - 1)(x + 2) = \log_2 2^2,$$

тј.

$$(x - 1)(x + 2) = 4.$$

Дакле, дата логаритамска једначина је за $x > 1$ еквивалентна квадратној једначини

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Рјешења ове квадратне једначине су $x = 2$ и $x = -3$. Рјешење $x = 2$ задовољава услов $x > 1$ па је рјешење логаритамске једначине $x = 2$.

8. Једнакокраки троугао ABC има основицу $AB = 10m$ и кракове $AC = BC = 13m$. Површина троугла ABC је (заокружити тачан одговор)

а) $30m^2$ б) $30cm^2$ в) $60m^2$ г) $80m^2$.

Рјешење: Висину једнакокраког троугла одређујемо из правоуглог троугла ADC гдје је D подножје висине из врха C на основицу $a = AB$. Пошто се подножје висине у једнакокраком троуглу налази на половини основице примјеном Питагорине теореме добијамо

$$h = AD = \sqrt{AC^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

Према томе,

$$P = \frac{ah}{2} = \frac{10m \cdot 12m}{2} = 60m^2.$$

Тачан одговор је в).

9. Написати једначину праве које пролази кроз тачке $A(1,-2)$ и $B(3,-1)$. Провјерити да ли тачке $C(0,2)$ и $D(-5,-5)$ припадају правој која је одређена тачкама A и B.

Рјешење: Једначина праве које пролази кроз тачке (x_1, y_1) и (x_2, y_2) је

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Уврштавањем тачака $A(1,-2)$ и $B(3,-1)$ у горњу једначину добијамо

$$y + 2 = \frac{-1+2}{3-1}(x-1)$$

тј.

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x-1).$$

Једначина праве која пролази кроз тачке A и B је

$$x - 2y - 5 = 0.$$

Уврштавањем координата тачке $C(0,2)$ у једначину праве, добијамо

$$-4 - 5 = -9 \neq 0$$

па тачка C не припада правој која је одређена тачкама A и B.
За тачку $D(-5,-5)$ имамо

$$-5 + 10 - 5 = 0$$

па тачка D припада правој која је одређена тачкама A и B.

10. Површина дијагоналног пресјека правилне четворостране пирамиде је $12\sqrt{2}cm^2$, а основна ивица је $a = 8cm$. Израчунати површину пирамиде.

Рјешење: Површина дијагоналног пресјека правилне четворостране пирамиде је

$$P_d = \frac{d \cdot H}{2},$$

гдје је d дијагонала основе и H висина пирамиде. Пошто је $a = 8cm$ добијамо $d = 8\sqrt{2}cm$, па је

$$\frac{8\sqrt{2} \cdot H}{2} = 12\sqrt{2}.$$

Одавде добијамо је $H = 3cm$.
Да бисмо израчунали површину пирамиде, преостаје нам да одредимо апотему, тј. висину бочне стране пирамиде. Из правоуглог тругла чија су тјемена врх пирамиде, подножје висине пирамиде и подножје апотеме h добијамо

$$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5cm.$$

Према томе,

$$P = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 64cm^2 + 2 \cdot 8 \cdot 5cm^2 = 144cm^2.$$