






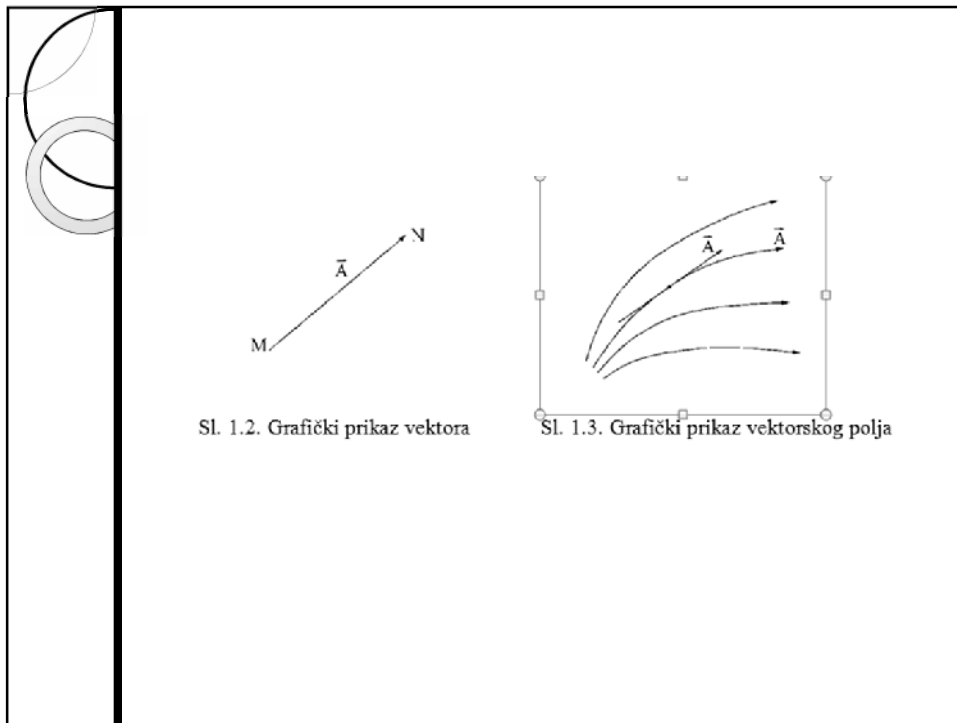
OSNOVNI POJMOVI O SKALARNIM I VEKTORSKIM VELIČINAMA

Za kvantitativno opisivanje pojava u elektrotehnici koristi se određeni matematički aparat. Pretpostavlja se da čitalac vlada većinom tog matematičkog aparata, a ovaj i sledeći dio treba da budu podsetnik na neka poglavlja matematike, koja su neophodna za bolje opisivanje pojava u elektrotehnici

- 
- Kao što je čitaocu verovatno poznato, osim skalarnih veličina (temperatura, snaga, energija i sl.), definisanim samo brojnomo vrednošću, postoje i veličine koje ne mogu dovoljno dobro da se opišu samo brojnomo vrednošću.
 - Kretanje automobila, na primer, nije dovoljno opisano samo brojnomo vrijednošću brzine kretanja, već je potrebno definisati i pravac i smer tog kretanja.
 - U cilju što preciznije definicije svih sličnih veličina, uvodi se pojam vektorske veličine ili vektora, kome se, osim brojne vrijednosti ili intenziteta vektora, pridružuju i pravac i smer vektora. Najčešće korišćene vektorske veličine su sila, brzina, ubrzanje, putanja i slično.

- 
- Dio prostora, kome je, u svakoj tački, u opštem slučaju, pridružena samo brojčana vrijednost, naziva se skalarno polje, dok se dio prostora, čije stanje se opisuje vektorskim vrijednostima u svakoj tački, naziva vektorsko polje.

- 
- Vektorske veličine se obično obeležavaju strelicom iznad oznake vektora, kao, na primer, \vec{v} , \vec{F} , i slično. Intenzitet vektora se obično obeležava kao apsolutna vrijednost, ili, jednostavno, F (bez strelice, koja ga označava kao vektor). Grafički se vektor obično predstavlja strelicom, kao što je to prikazano na Sl. 1.2, pri čemu se definiše početna tačka vektora M i krajnja tačka N , koja se naziva kraj ili glava vektora.

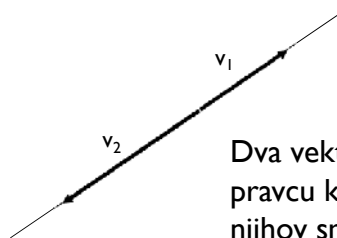


- Vektorsko polje takođe može da se prikaže grafički.
- Linije polja su, u opštem slučaju krive linije, koje imaju osobinu da je pravac vektorske veličine koja opisuje polje, u svakoj tački linije polja, tangentan na tu liniju.
- Uobičajeno je, takođe, da se skup linija polja opremi strelicama, koje definišu smer vektora, a gustina nacrtanih linija polja je proporcionalna intenzitetu vektora u svakom delu prostora.

- Od operacija sa vektorima, najveću važnost u tehnici uopšte, imaju zbir i razlika dva ili više vektora, kao i skalarni i vektorski proizvod dva vektora. Podsjećanju na te operacije će biti posvećen naredni dio teksta.

I.I.I. Vektori i skalari

- **Skalar** – veličina opisana samo iznosom
 - Npr: temperatura, volumen, masa ...
- **Vektori** – veličine određene smjerom, iznosom i orijentacijom



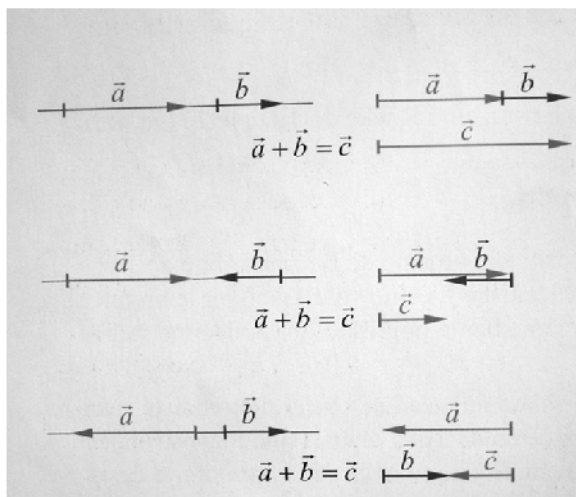
Dva vektora na istom pravcu koji određuje njihov smjer. Orijentacija određuje kao gledaju vektori.

I.I.I. Vektori i skalari

- **Smjer** vektora – određuje pravac na kojemu leže vektori
- **Orientacija** vektora – smjer strelice vektora; određuje kako gledaju vektori
- **Iznos** – označavamo s \vec{v} ili $|v|$
- **Kolinearni** vektori – vektori koji leže na istom pravcu

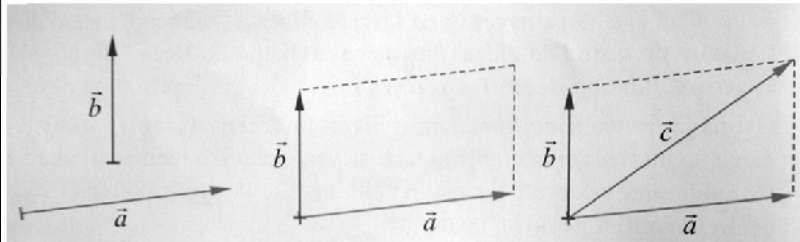
Zbrajanje vektora $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

- Zbrajanje kolinearnih vektora koji leže na istom pravcu:

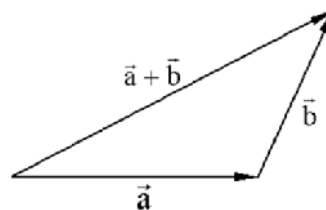


Zbrajanje vektora

- Zbrajanje nekolinearnih vektora pravilom paralelograma:

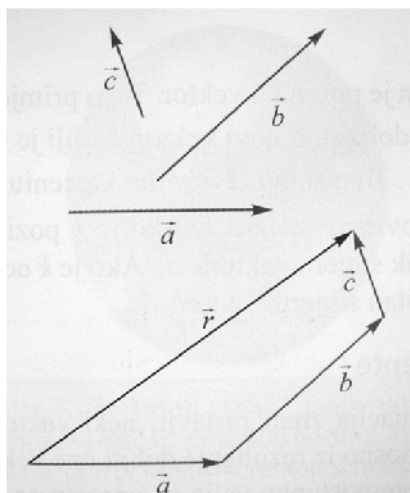


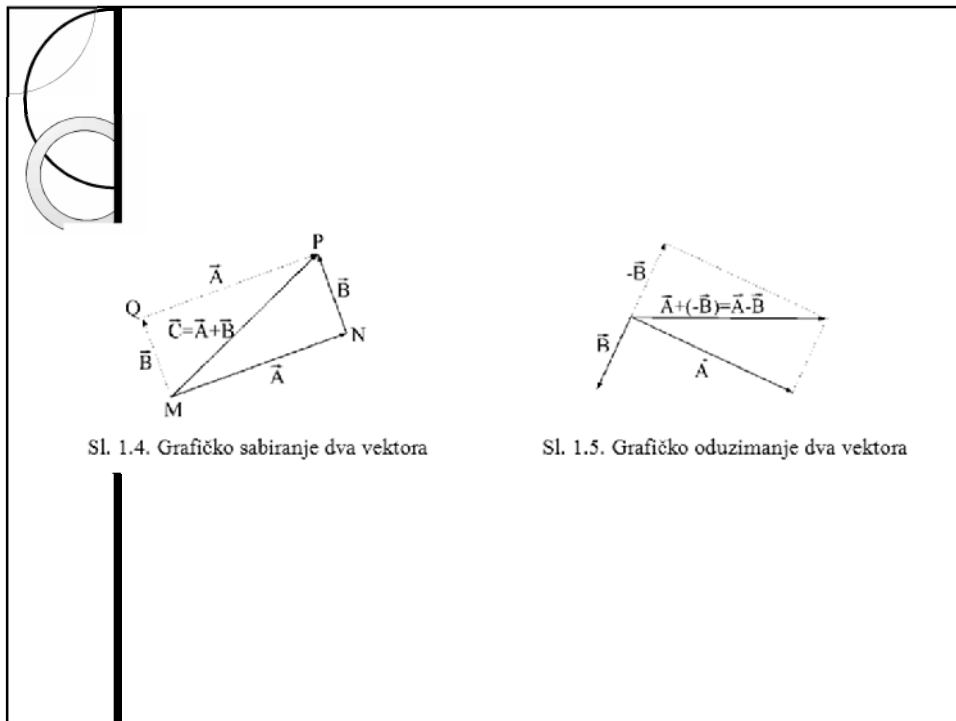
- Zbrajanje nekolinearnih vektora pravilom trokuta:



Zbrajanje vektora

- Zbrajanje više nekolinearnih vektora pravilom poligona:





Važno je, možda, još napomenuti da za zbir i razliku dva vektora važi komutativni zakon:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}, \text{ odnosno, } \vec{A} - \vec{B} = -\vec{B} + \vec{A}.$$

U radu sa vektorima se, u tehnici, veoma često sreće proizvod intenziteta dva vektora, pomnožen sa kosinusom ugla, koji zaklapaju pravci ismerovi ta dva vektora,

$$|\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha = AB \cos \alpha, \quad (1.1)$$

pri čemu je α ugao između pravaca vektora \vec{A} i \vec{B} . Gore prikazani proizvod je skalarna veličina, pa je jednostavno dogovoreno, da se takav proizvod nazove skalarni proizvod dva vektora i zapiše na sledeći, skraćeni, način:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha.$$

Za skalarni proizvod dva vektora važi, takođe, komutativni zakon,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (1.2)$$

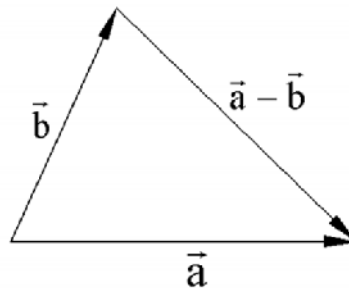
Često se, u tehnici, javlja i pojam vektorskog proizvoda dva vektora. Pod ovim pojmom se podrazumeva definisanje jednog novog vektora \vec{C} , čiji intenzitet je definisan kao

$$|\vec{C}| = AB \sin \alpha, \quad (1.3)$$

pravac mu je određen normalom na površ, koju definišu vektori \vec{A} i \vec{B} , a smer mu je određen takozvanim pravilom desne zavojnice. Pravilo desne zavojnice se, inače, takođe često koristi u tehnici. Ono glasi da se smer vektora \vec{C} određuje tako što se prvi vektor, najkraćim putem, zarotira u položaj drugog vektora i pri tome se posmatra smer rotacije. Smer vektorskog proizvoda ta dva vektora je

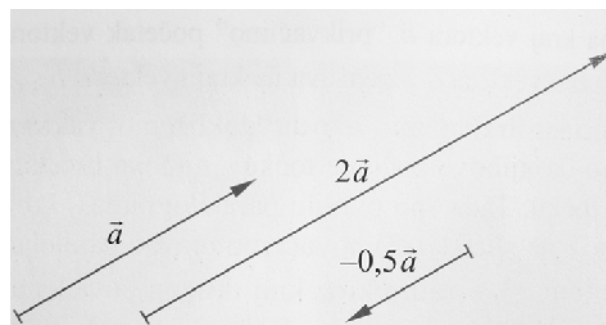
Oduzimanje vektora

- Oduzimanje vektora se definira kao operacija zbrajanja sa suprotnim vektorom:



Množenje vektora skalarom

- Množenje vektora skalarom: vektor a prvo je pomnožen sa 2, a zatim sa $-0,5$:



Matematičke osnove kompleksnog računa

Vektorski način prikazivanja električnih veličina često je prihvatljiviji od prikazivanja veličina kao funkcija vremena.

Metodom grafičkog vektorskog rešavanja mreža ne može udovoljiti povećanim zahtjevima točnosti, pa se koristi kompleksna simbolička metoda, gdje se električne veličine predaju u kompleksnoj ravnini kompleksnim brojevima

11/26/2016

17

Kompleksna ravnina

Imaginarna jedinica :

$$j = \sqrt{-1}$$

Svaka točka kompleksne ravnine može se jednoznačno odrediti pripadnim realnim i pripadnim imaginarnim brojem, dakle jednim kompleksnim brojem.

11/26/2016

18

Kompleksni broj može se prikazati na tri načina:

1. $A = a_1 + j \cdot a_2$

$$\begin{aligned} a_1 &= A \cdot \cos \alpha \\ a_2 &= A \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

2. $A = A (\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha)$

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \cdot \sin \alpha$$

3. $A = A \cdot e^{j\alpha}$

11/26/2016

19

Međusobna povezanost parametara sva tri oblika:

$$A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$a_2 = A \cdot \sin \alpha$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_1 = A \cdot \cos \alpha$$

11/26/2016

20

Konjugirano kompleksni brojevi

Dva kompleksna broja su konjugirano kompleksni ako imaju iste module, a argumenti su im po iznosu jednaki, ali suprotnih predznaka (oznaju se zvjezdicom $e^{j\alpha}$).

Broju konjugirano kompleksni broj je:

$$A^* = A \cdot e^{-j\alpha}$$

$$A^* = A (\cos \alpha - j \cdot \sin \alpha)$$

$$A^* = a_1 - j \cdot a_2$$

(sl. 15.3)

11/26/2016

21

Konjugovano kompleksna vrijednost nekog kompleksnog broja, $\underline{Z} = a + jb$, obično obilježena zvjezdicom, data je izrazom:

$$\underline{Z}^* = a - jb \quad (1.16)$$

Sabiranje i oduzimanje dva kompleksna broja, $\underline{Z} = a + jb$ i $\underline{Y} = c + jd$, vrši se tako što se posebno saberu realni, a posebno imaginarni dijelovi,

$$\underline{Z} \pm \underline{Y} = (a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d) \quad (1.17)$$

Množenjem dva kompleksna broja dobija se sljedeći izraz:

$$\underline{Z} \cdot \underline{Y} = (a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc + j^2bd = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

što predstavlja kvadrat modula kompleksnog broja. Prema tome, modul kompleksnog broja \underline{Z} je,

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dijeljenjem dva kompleksna broja, $\underline{Z} = a + jb$ i $\underline{Y} = c + jd$, dobija se novi kompleksni broj,

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}} = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac - jad + jbc - j^2bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}^*}{\underline{Y} \cdot \underline{Y}^*} = \frac{\underline{Z} \cdot \underline{Y}^*}{Y^2}$$

Kompleksni broj $\underline{Z} = a + jb$, može da se predstavi i u takozvanom eksponencijalnom obliku,

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}, \quad \text{gde je } Z = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ i}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Kao što je već rečeno, $|\underline{Z}| = Z$ predstavlja modul, a ugao φ se naziva argument kompleksnog broja.

Transformacija kompleksnog broja iz algebarskog u eksponencijalni oblik može da se izvede korišćenjem Ojlerovog obrasca, koji glasi,

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha.$$

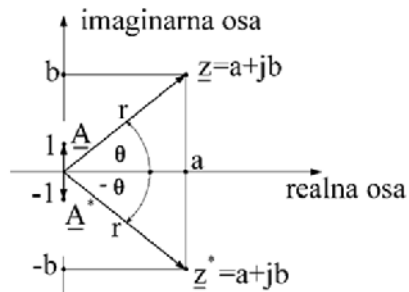
Koristeći modul Z i argument φ , osim u takozvanom algebarskom obliku, $\underline{Z} = a + jb$, kompleksni broj može da se zapiše i u trigonometrijskom obliku,

$$\underline{Z} = Z(\cos \alpha + j \sin \alpha).$$

Kompleksni broj \underline{Z} može grafički da se predstavi u takozvanoj kompleksnoj ili faznoj ravni. Takvo predstavljanje kompleksnog broja je prikazano na Sl. 1.6. Ugao φ se računa od pozitivnog dijela realne ose i to tako da se uglovi veći od nule nanose u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljki na satu, dok se negativni uglovi nanose u smjeru kretanja kazaljki na satu.

negativni uglovi nanose u smjeru kretanja kazaljki na satu. Kao što može da se vidi na Sl. 1.6, veliki broj veličina, koje su pomenute u prethodnom tekstu mogu da se prikažu u kompleksnoj ravni. Sa Sl. 1.6. može, takođe da se vidi da je

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{Z} \quad \text{i} \quad \sin \varphi = \frac{b}{Z}.$$



Slika 1.6. Grafičko prikazivanje kompleksnog broja



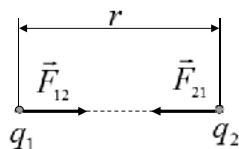
Naelektrisanje

- Osnovna osobina materije (kao masa)
- Svojstvo elementarnih estica
- Dve vrste
 - Pozitivno
 - Negativno
- Oznaka Q, jedinica kulon (C)
- $e=1,602 \cdot 10^{-19}C$, proton +e, elektron -e

Elektrostati ka sila me u esticama

- Privla na me u esticama naelektrisanim razli itim vrstama naelektrisanja
- Odbojna me u esticama naelektrisanim istom vrstom naelektrisanja
- Osnova i suština cele elektrotehnike, tera naelektrisanja da se kre u, što mi koristimo

Elektrostati ka sila me u esticama



- Pravac duži koja spaja materijalne ta ke
- Smer: vrsta naelektrisanja
- Intenzitet: Kulonov zakon

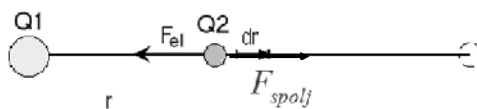
$$F_{12} = F_{21} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

$$k = \frac{k_0}{\varepsilon_r} \quad k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

Dielektri na konst: $\varepsilon_r(\text{vazduh}) \approx 1$, $\varepsilon_r(\text{parafin}) \approx 5$, $\varepsilon_r(\text{metal}) \rightarrow \infty$

Elektrostati ka energija interakcije me u esticama

- Potencijalna energija elektrostati ke interakcije (sile)
- Znamo da postoji jer elektrostati ka sila ubrzava estice, pove ava im kineti ku energiju

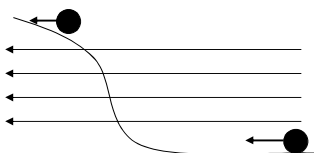


$$\Delta W_{el} = \Delta A_{sp} = \int_r^s dA = \int_r^s kQ_1Q_2 \frac{1}{r^2} dr = \left(-kQ_1Q_2 \frac{1}{r} \right)_r^s = -kQ_1Q_2 \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\Delta W_{el} = k \frac{Q_1Q_2}{r} \wedge W_{el}(\infty) = 0 \Rightarrow \boxed{W_{el}(r) = -k \frac{Q_1Q_2}{r}}$$

Rad sila elektrostati kog polja

- Osnova svih prakti nih primena

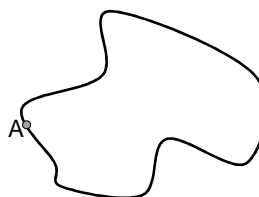


$$A_{el} = -\Delta W_{el} = -(W_{kr} - W_{poc}) = W_{poc} - W_{kr}$$

- Rad elektrostati kog polja zavisi samo od krajnih ta aka putanje, a ne od njenog oblika

Rad sila elektrostati kog polja po bilo kojoj zatvorenoj putanji je jednak nuli

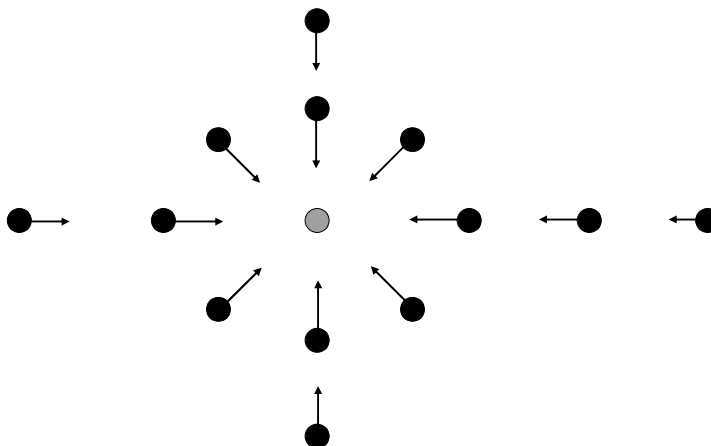
$$A_{zativ} = W_A - W_A = 0$$



- Nije mogu e napraviti elektrostati ki motor koji radi u ciklusu

Elektrostati ko polje estica

- Fizi ko polje koje postoji oko naelektrisane estice
- "Paukova mreža" estice



Elektrostati ko polje

- Opisuje sve dvema lokalnim i dvema integralnim veli inama
 - Lokalne: govore o osobinama polja u ta ki
 - Vektorska veli ina: ja ina polja
 - Skalarna veli ina: potencijal
 - Integralne: govore o osobinama polja u nekoj oblasti
 - Fluks (kroz neku površinu)
 - Cirkulacija (po nekoj liniji)

Ja ina elektri nog polja

- Vektor koji opisuje elektri no polje
- Govori o sili koju polje može da stvori

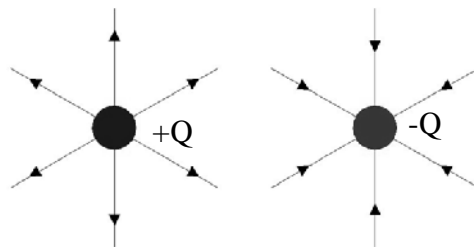
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{probno}}{q_{probno}} \quad [E] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

- Ja ina elektri nog polja estice naelektrisanja Q

$$E = \frac{F_{probno}}{q_{probno}} = \frac{k \frac{Qq_{probno}}{r^2}}{q_{probno}} = k \frac{Q}{r^2}$$

Ja ina elektri nog polja

- Grafi ko predstavljanje linijama sile
- *Pravac* linija pokazuje pravac polja (sile)
- *Gustina* pokazuje intenzitet polja (sile)
- *Po inju* u pozitivnim naelektrisanjima
- *Završavaju* se u negativnim naelektrisanjima
- Linije sila elektri nog polja estice



ELEKTROSTATIKA

HOMOGENO ELEKTRIČNO POLJE

11

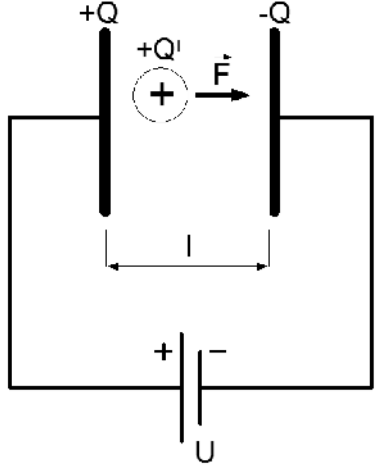
11/26/2016

Električno polje ploštog kondenzatora

I nakon uspostave statičke ravnoteže u izolacionom prostoru između dva suprotno nabijena tijela, postoje značajne fizikalne pojave - promatrat ćemo ih na primjeru ploštog kondenzatora priključenog na izvor istosmjernog napona.

12

11/26/2016



- Izolator \Rightarrow vakuum
- Između ploha uvodi se, pokusni naboj $+Q$
- na naboj djeluje sila F
- prostor između ploha kondenzatora u kojem su naboji izvrnuti djelovanju mehaničkih sila je - ELEKTRIČNO POLJE

13 11/26/2016

Općenito je električno polje prostor u kojem na mirujuće električne naboje djeluju mehaničke sile.

↓

Ako je sila F na pokusni naboj u električnom polju na svakom mjestu jednaka, takvo polje naziva se:
HOMOGENO ELEKTRIČNO POLJE

14 11/26/2016

ja ina ELEKTRI NOG POLJA

Gibanje naboja pod djelovanjem sile je rad:

$$A = F \cdot l$$

$$W = U \cdot I \cdot t = U \cdot Q$$

$$A = W \Rightarrow F \cdot l = U \cdot Q \Rightarrow F = Q \cdot U/l$$

$$U/l = E \text{ - ja ina elektri nog polja} \Rightarrow F = Q \cdot E$$

$$E = F/Q$$

Jedinica - $E = U/l$ (V/m)

15

11/26/2016

Primjenom jednadžbi $E = U/l$ i $Q = C \cdot U$, uz $C = \epsilon_0 \cdot S/l$, izlazi:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \delta$$

Gusto a naboja na plo ama
kondenzatora:

$$\delta = \frac{Q}{S}$$

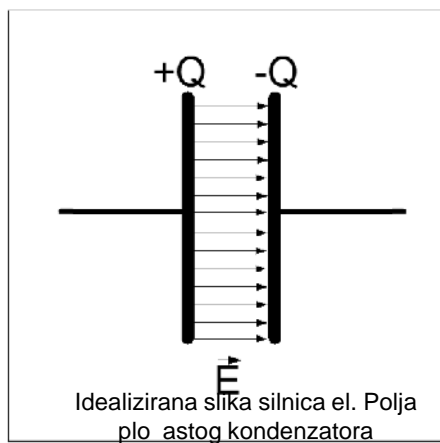
$$\delta = \epsilon_0 \cdot E$$

16

11/26/2016

SILNICE ELEKTRINOG POLJA

Prema Faradayu električno polje se može predložiti pomoću silnica polja, a to su zamišljene linije koje karakteriziraju vektorski jačini polja E .



17

11/26/2016

Sile električnog polja na električne naboje. Električna indukcija.

Kao što sila djeluje na elementarne el. naboje u el. polju, tako će djelovati i na elementarne čestice materijala koji se nalazi u električnom polju.

Različito će sila djelovati na električki vodljive materijale, nego na izolatore.

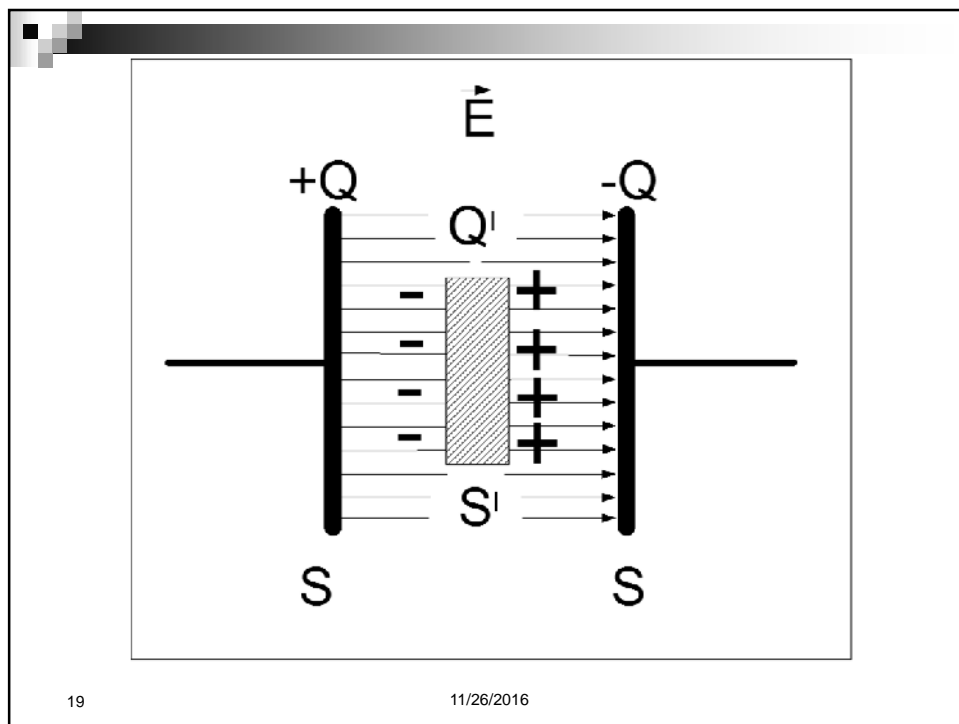
Vodivi \Rightarrow električna indukcija

Gustoća induciranog naboja - Q'/S'

Izolatori \Rightarrow polarizacija

18

11/26/2016



Ako kod izolatora ja ina elektri nog polja preraste unutarnju elektri nu silu, elektroni se odvajaju od jezgre, izolator postaje vodljiv, odnosno došlo je do proboja izolatora.

Vektor gustoće električnog pomaka

U inak influencije ovisi o kutu polja E i površine materijala, pa gustoća induciranog naboja ima vektorski karakter - D .
 D - vektor gustoće električnog pomaka.

$$D = Q'/S'$$

$$D = \epsilon_0 \cdot E$$

$$Q_i = D \cdot S = \epsilon_0 \cdot E \cdot S$$

21

11/26/2016

Električni potencijal

Naboj $+Q'$ pomaknut u homogenom električnom polju za udaljenost z prema pozitivnoj plohi, zbog suprotnog djelovanja sile F potrošio je rad:

$$A' = F \cdot z = Q' \cdot U/l \cdot z$$

Ako je naboj u položaju z_0 imao energiju A_0 , onda u položaju z vrijedi:

$$A = A_0 + Q' \cdot U/l \cdot z \quad /: +Q'$$

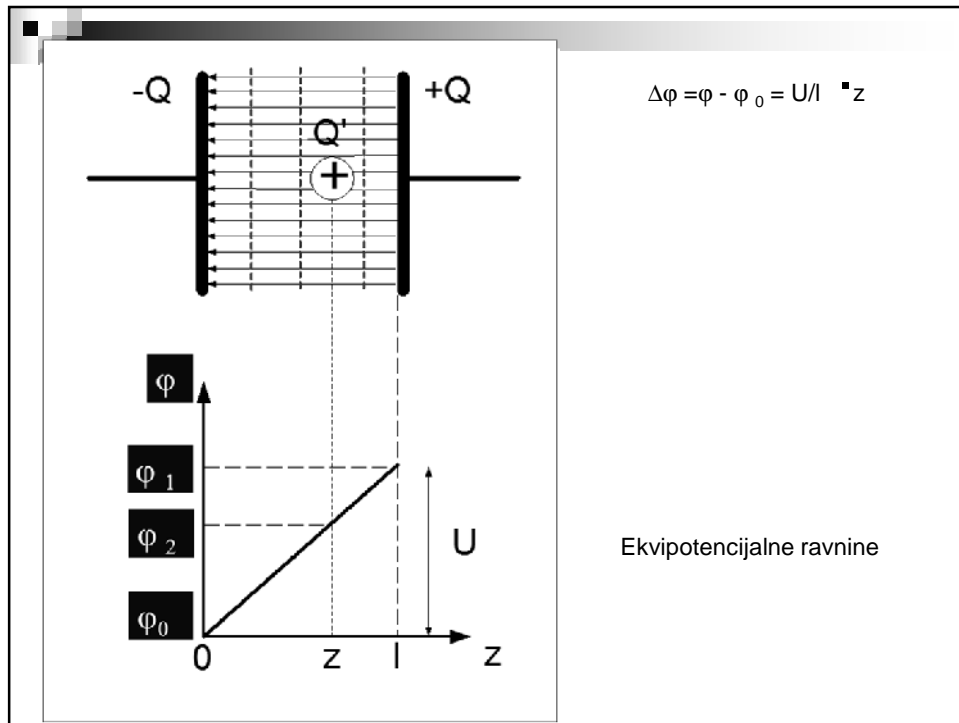
$$A/Q' = A_0/Q' + U/l \cdot z$$

Električni potencijal homogenog električnog polja:

$$\varphi = U/l \cdot z + \varphi_0$$

22

11/26/2016



Napon - razlika elektri nih potencijala

$$U = \phi_1 - \phi_0$$

$$U_{AB} = \phi_A - \phi_B$$

Potencijal elektri nog polja

- Skalar koji opisuje elektri no polje
- Govori o energiji koju imaju estice u polju

$$V = \frac{W_{probno}}{q_{probno}} \quad [V] = \frac{J}{C} = V$$

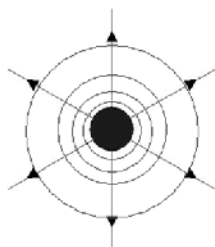
- Potencijal elektri nog polja estice naelektrisanja Q

$$V = \frac{W_{probno}}{q_{probno}} = \frac{k \frac{Qq_{probno}}{r}}{q_{probno}} = k \frac{Q}{r}$$

Potencijal elektri nog polja

- Grafi ki se opisuje ekvipotencijalnim linijama
- Linije koje spajaju ta ke jednakog potencijala
- Normalne na linije sila
- Gustina govori o ja ini polja

- Ekvipotecijalne linije naelektrisanih estica



Napon elektri nog polja

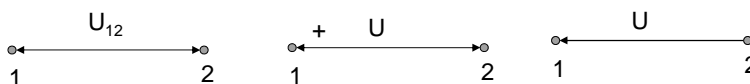
- Govori o radu koji može da izvrši elektri no polje

$$A_{el} = W_{poc} - W_{kr} = qV_{poc} - qV_{kr} = q(V_{poc} - V_{kr})$$

$$(V_{poc} - V_{kr}) = U$$

$$A_{el} = qU$$

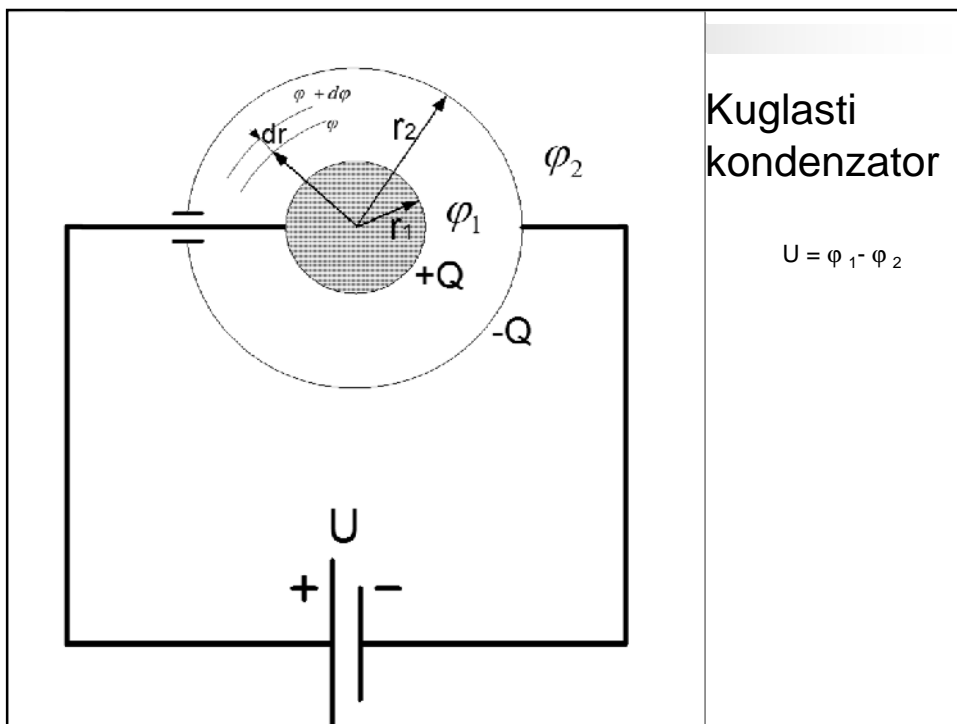
$$(V_1 - V_2) = U_{12} \Rightarrow U_{21} = (V_2 - V_1) = -U_{12}$$



NEHOMOGENO ELEKTRI NO POLJE

Elektri no polje u kojem se jakost polja E mijenja od to ke do to ke naziva se **nehomogeno elektri no polje**.

Sve do sada izvedene zakonitosti za homogeno polje vrijede i za nehomogeno, ali se mijenjaju prostorno - pa je potrebno u nehomogenom polju izdvojiti infitezimalno mali dio, za koji se može tvrditi da u njemu vladaju prilike homogenog polja.



Jednadžba:
$$U = \frac{Q \cdot l}{\epsilon_0 \cdot S}$$

postaje:
$$dU = \frac{Q \cdot dr}{\epsilon_0 \cdot 4r^2 \pi} \Rightarrow U = \frac{Q}{4\epsilon_0 \pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{U} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

30 11/26/2016

Kapacitet osamljene kugle

$$r_2 \gg r_1$$

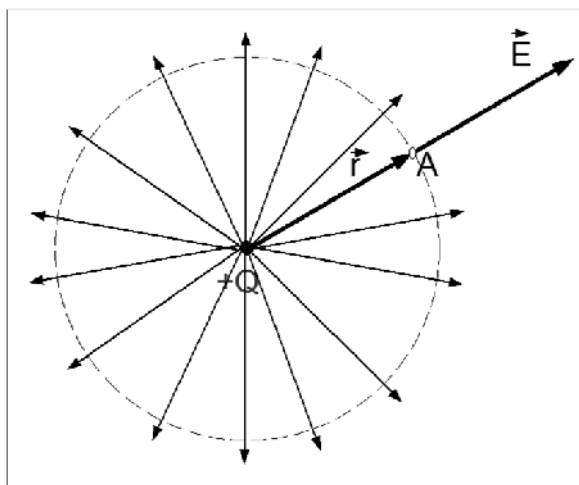
Kapacitet kuglastog kondenzatora radijusa R:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot R$$

31

11/26/2016

Jakost elektri nog polja kuglastog kondenzatora



$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

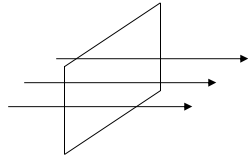
32

Elektri no polje to kastog na 2016

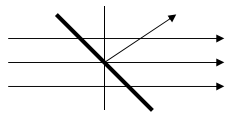
Fluks elektri nog polja

■ Fluks = protok

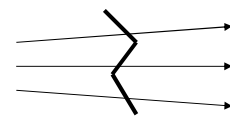
- grafi ki: broj linija sila koje prolaze kroz neku površinu
- matemati ki:



$$\Phi = \text{gustina} \cdot \text{povrs} = E \cdot S \quad [\Phi] = \frac{V}{m} \cdot m^2 = Vm$$



$$\Phi = E \cdot S \cdot \cos(\vec{E}, \vec{S}) = \vec{E} \cdot \vec{S}$$



$$\Phi = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 + \vec{E}_3 \cdot \Delta\vec{S}_3 = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

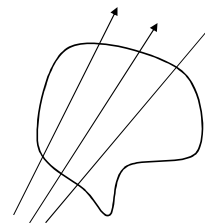
Fluks elektri nog polja

■ Gausov zakon

- Odre uje fluks elektri nog polja kroz zatvorenu površinu
- Fluks je pozitivan ako linije izlaze iz zatvorene površine, a negativan ako linije ulaze u nju
- Fluks elektri nog polja kroz neku zatvorenu površinu proporcionalan je koli ini naelektrisanja zatvorenoj u njoj
- Fluks kroz zatvorenu površinu ne zavisi od oblika površine
- Ako u zatvorenoj površini nema naelektrisanja, fluks kroz nju je jednak nuli

$$\Phi_{\text{zatvorene}} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \cdot Q_{\text{zatvoreno}} = \frac{\sum Q}{\epsilon_0}$$

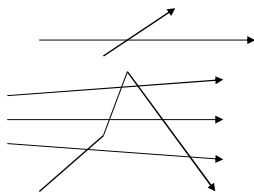
$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm} \quad \left[\frac{F}{m} \right]$$



Cirkulacija elektri nog polja

- Cirkulacija = kruženje

- grafi ki: usaglašenost linija polja i izabrane linije
- matemati ki:



$$c = E \cdot l \cdot \cos(\vec{E}, \vec{l}) = \vec{E} \cdot \vec{l}$$

$$c = \vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta \vec{l}_2 + \vec{E}_3 \cdot \Delta \vec{l}_3 = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{l}_i$$

$$c = \int_i \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Cirkulacija elektrostati kog polja

- Cirkulacija po nekoj liniji proporcionalna je radu koji elektrostati ko polje izvrši pri kretanju naelektrisanja po toj putanji

$$A = \int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_l q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = qc \wedge A = qU \Rightarrow c = U$$

- Napon je cirkulacija elektri nog polja po nekoj putanji izme u dve ta ke
- Cirkulacija elektrostati kog polja po bilo kojoj liniji koja spaja dve ta ke je jednaka
- Zakon konzervacije elektrostati kog polja:

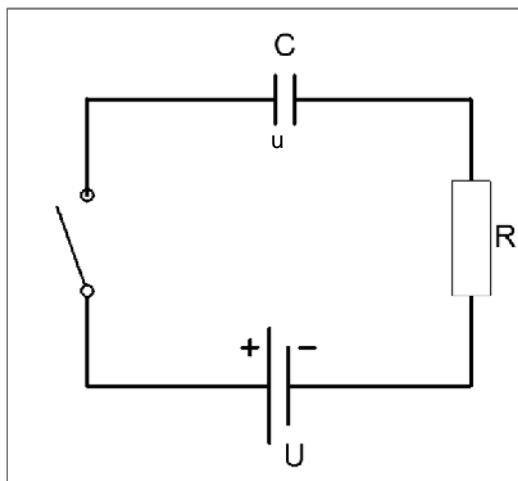
Cirkulacija elektri nog polja po bilo kojoj zatvorenoj putanji je jednaka nuli

ENERGIJA ELEKTROSTATSKOG POLJA

- PRIKLJUČAK KONDENZATORA NA ISTOSMJERNI NAPON
- ENERGIJA NABIJENOG KONDENZATORA
- SILE U ELEKTRIČNOM POLJU PLOŠASTOG KONDENZATORA
- ODNOS ELEKTRIČNE I TOPLINSKE ENERGIJE PRI NABIJANJU KONDENZATORA

Budući da na naboje u električnom polju djeluje mehanička sila F , što je da električno polje posjeduje određenu količinu energije
 \Rightarrow ELEKTRIČNA ENERGIJA

PRIKLJUČAK KONDENZATORA NA ISTOSMJERNI NAPON



Na izvor istosmjernog napona U sklopkom se uključuje kondenzator C , uz otpor strujnog kruga R .

PRIJELAZNA POJAVA

39

11/26/2016

Uvid u strujne i naponske prilike omogućuje nam primjena drugog Kirchhoffovog zakona:

$$\sum \text{napona} = \sum i \cdot R$$

$$U - u = i \cdot R$$

$$q = C \cdot u$$

$$dq = C \cdot du$$

$$u = \frac{q}{C}$$

40

11/26/2016

Uz: $i = \frac{dq}{dt}$ $i = C \frac{du}{dt}$

Naponska jednačina glasi:

$$U - u = C \cdot \frac{du}{dt} \cdot R$$

Ili:

$$U - u = CR \cdot \frac{du}{dt}$$

41

11/26/2016

Iz naponske diferencijalne jednačine koja prikazuje ovisnost napona na kondenzatoru o vremenu, pa se može odrediti $u = f(t)$, a zatim $i = i(t)$.

Konstanta RC , ima dimenziju vremena:

$$(RC) = \Omega \text{ As/V} = \text{s}$$

pa se naziva vremenska konstanta $\Rightarrow \tau = R \cdot C$

42

11/26/2016

Naponska jedna ina sada ima oblik:

$$\frac{du}{U-u} = \frac{dt}{\tau}$$

Integriranjem kojega se dobije:

$$\ln \frac{U-u}{U} = -\frac{t}{\tau}$$

Odnosno u eksponencijalnom obliku:

$$\frac{U-u}{U} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

43

11/26/2016

Kona no slijedi:

$$u = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

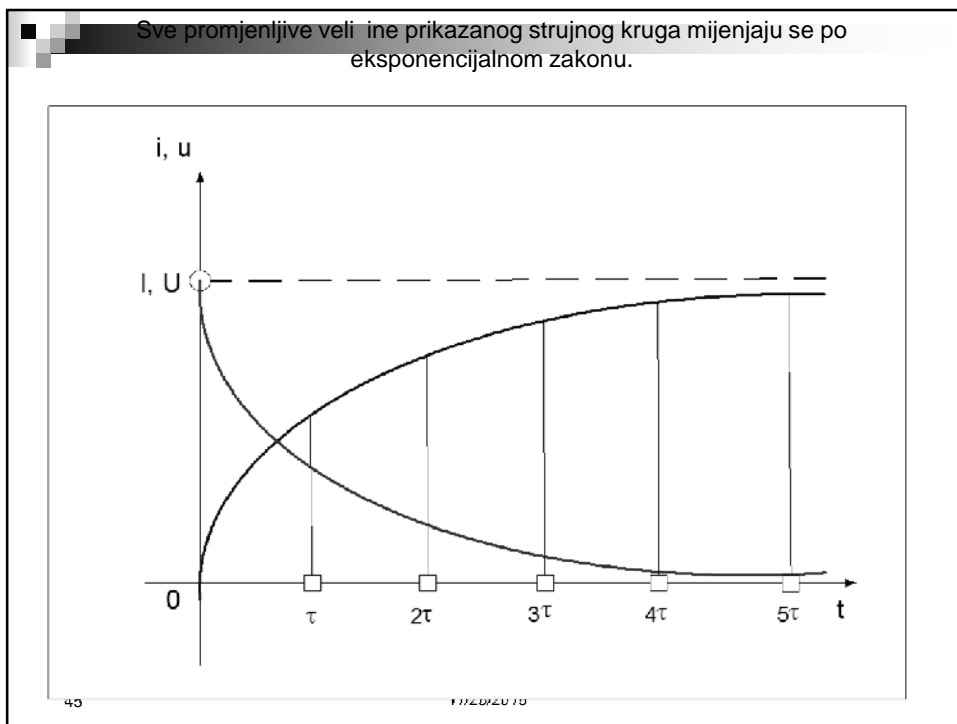
Kao i za ostale veli ine:

$$q = Q \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i = I \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

44

11/26/2016



Kada bi se kondenzator nabijen na napon U ispraznio preko otpora R , napon i struja se mijenjaju kao:

$$u = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = -\frac{U}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Smjer struje pražnjenja suprotan je smjeru struje nabijanja

ENERGIJA NABIJENOG KONDENZATORA

Cilj: Izraziti energiju nabijenog kondenzatora.

Općenita formula za energiju: $W = U \cdot I \cdot t = U \cdot Q$

Naponska jednačina: $U = I \cdot R + u$

$$i \cdot dt = dq$$

$$U = I \cdot R + u / i \cdot dt$$

$$U \cdot i \cdot dt = i^2 \cdot R \cdot dt + q/C \cdot dq$$

Energija izvora:

$$W_{izv} = i^2 \cdot R \cdot dt + 1/C \cdot q \cdot dq$$

47

11/26/2016

Ukupna energija dobivena se integriranjem u granicama, za t , od 0 do ∞ , i za q , od 0 do Q .

$$W_{izv} = \int_0^{\infty} i^2 \cdot R \cdot dt + \frac{1}{C} \int_0^Q q \cdot dq$$

$$W_{izv} = W_{topl} + \frac{1}{C} \frac{Q^2}{2}$$

48

11/26/2016

Električna energija nabijenog kondenzatora je:

$$W_{el} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{UQ}{2}$$

49

11/26/2016

Prostorna gustoća električne energije, odnosno količina energije po jedinici volumena, w , je:

$$w = \frac{W_{el}}{V} = \frac{C}{V} \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon \cdot \frac{S}{l}}{S \cdot l} \cdot \frac{U^2}{2} = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{U^2}{l^2} = \frac{\epsilon \cdot E^2}{2}$$

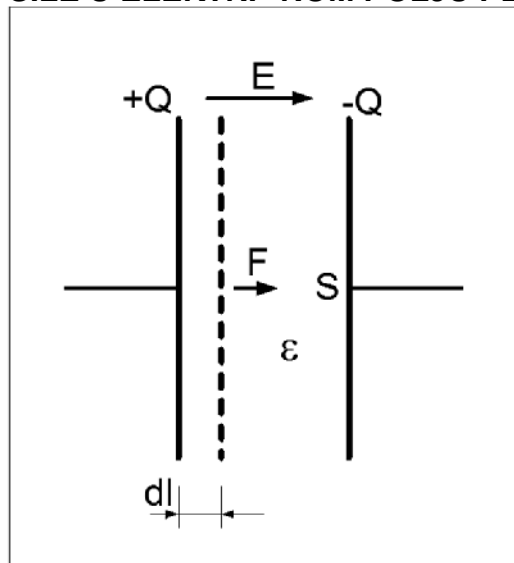
Uz supstituciju, $D = \epsilon E$:

$$w = \frac{\epsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D \cdot E}{2} = \frac{D^2}{2 \cdot \epsilon}$$

50

11/26/2016

SILE U ELEKTRONOM POLJU PLOŠTASTOG KONDENZATORA



Ako se pozitivna ploha pomakne za dl , sila F izvrši rad: $dA = Fdl$, ime je potrošena energija el. polja sadržana u volumenu $dV = Sdl$

51

11/26/2016

$$dW_{el} = \varepsilon \cdot \frac{E^2}{2} \cdot Sdl$$

$$dW_{el} = dA$$

$$\frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S \cdot dl = F \cdot dl$$

⇒ sila za cijelu plohu u:

$$F = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S = \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot S}$$

52

11/26/2016

$$F = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot S = \frac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon \cdot S}$$

Sila na jedinicu površine, ili elektri ni tlak:

$$\frac{F}{S} = \frac{\varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{D^2}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{D \cdot E}{2}$$

53

11/26/2016

ODNOS ELEKTRI NE I TOPLINSKE ENERGIJE PRI NABIJANJU KONDENZATORA

Iz energetske jednadžbe nabijanja kondenzatora

$$U \cdot Q = W_{topl.} + \frac{U \cdot Q}{2}$$

slijedi:

$$W_{topl.} = \frac{U \cdot Q}{2} \Rightarrow W_{topl.} = W_{el.}$$

54

11/26/2016

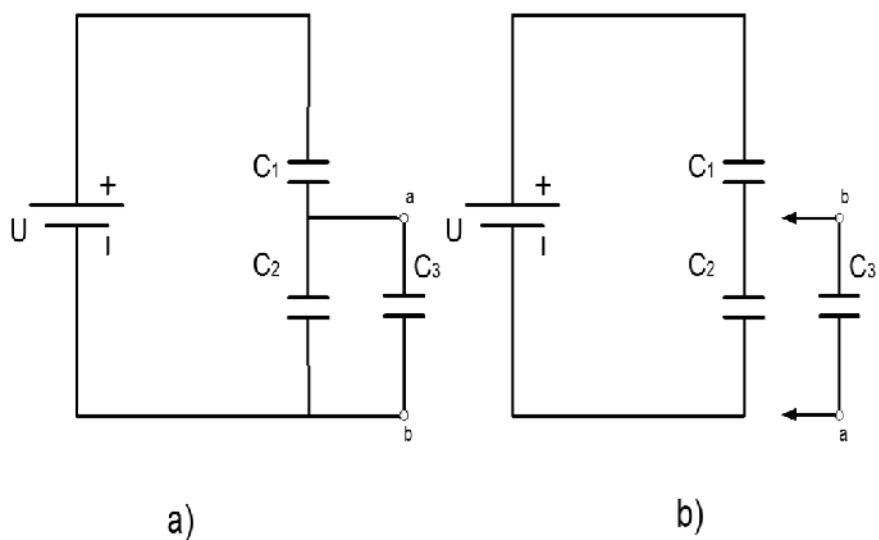
ZADATAK

Tri nenabijena kondenzatora kapaciteta $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$ i $C_3 = 4 \mu\text{F}$, spojena su u kombinaciju prema slici a) i priključena na izvor napona $U = 100 \text{ V}$. Nakon toga kondenzator C_3 se odspaja, preokreće i uz oduvan naboj ponovno priključuje paralelno kondenzatoru, kao na slici b).

Koliku promjenu napona na C_1 uzrokuje takav postupak?

55

11/26/2016



Naelektrisanje tela

- Naelektrisanje tela
 - Suma naelektrisanja svih estica
 - Ako postoji višak naelektrisanja jedne vrste kažemo da je telo naelektrisano
- Naelektrisanje
 - Dodirom
 - Trenjem
 - Influencijom



Elektroni materijali

- Provodnici i izolatori
 - Provodnici: naelektrisanje se po njima kreće i raspoređuje po celoj površini
 - Izolatori: naelektrisanje ostaje na mestu gde je nastalo
- Provodnici su materijali koji sadrže pokretna naelektrisanja
 - metali (elektroni)
 - elektroliti - ione u rastvoru soli (pozitivni i negativni joni soli)
 - jonizovani gasovi (elektroni i pozitivni joni)
- Izolatori su materijali koji ne sadrže pokretna naelektrisanja
- Poluprovodnici – izolatori u kojima pod određenim uslovima nastaju pokretna naelektrisanja

Provodnici

■ Naelektrisanje na provodniku

- Naelektrisanja istog znaka se međusobno odbijaju
- Ukoliko mogu da se kreću, raspoređuju se što dalje mogu

Naelektrisanje se raspoređuje po površini provodnika

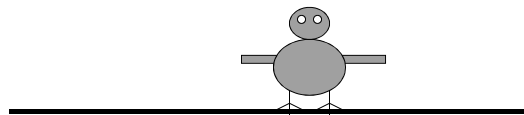
- Idealni provodnik se ne suprotstavlja kretanju naelektrisanja
- Raspoređivanje se vrši dok se ne postigne ravnoteža
- U ravnoteži je sila na svako naelektrisanje jednaka nuli, a energija svih naelektrisanja je jednaka

Potencijal svih tačaka idealnog provodnika je isti

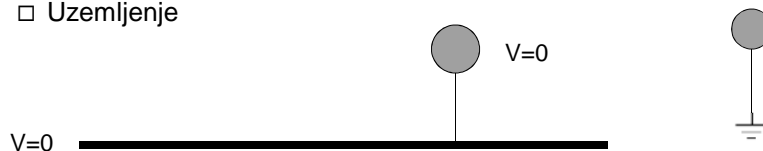
Provodnici

■ Potencijal svih tačaka idealnog provodnika je isti

- Vrlo važno pravilo: napon između dve tačke idealnog provodnika je jednak nuli



- Dve tačke spojene provodnikom imaju jednak potencijal
- "Kratki spoj" "kurz schluss"
- Uzemljenje



Provodnici

- Kapacitivnost provodnika

- Koliki je potencial provodnika?
- Što više naelektrisanja na provodniku, veće je odbijanje
- Što veće odbijanje, veća je energija koju naelektrisanja imaju
- Što je veća energija, veći je potencial provodnika

$$V \propto Q$$

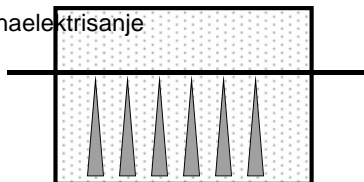
$$\boxed{\frac{Q}{V} = C} \quad [C] = \frac{C}{V} = F$$

- Kapacitivnost pokazuje u kojoj meri provodnik "podnosi" naelektrisanje

Provodnici

- Raspored naelektrisanja na provodniku
- Naelektrisanja se lakše razdvajaju na ispupčenjima nego na ravnim delovima jer su tada pri istim gustinama međusobno dalja

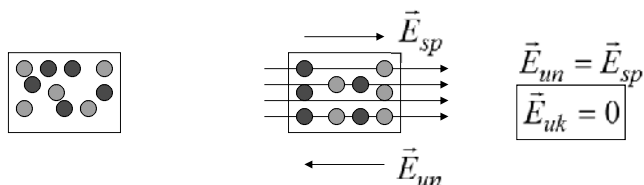
- Posebno se nakupljaju na šiljcima "efekat šiljka"
- Za namerno, kontrolisano izazivanje varjenja radi ukljanjanja naelektrisanja
 - Gromobrani
 - "ešljevi" za naelektrisanje



Provodnici

■ Provodnik u spoljašnjem elektri nom polju

- ekranizacija spoljašnjeg polja
 - Elektrostatiko polje ne prodire u unutrašnjost provodnika



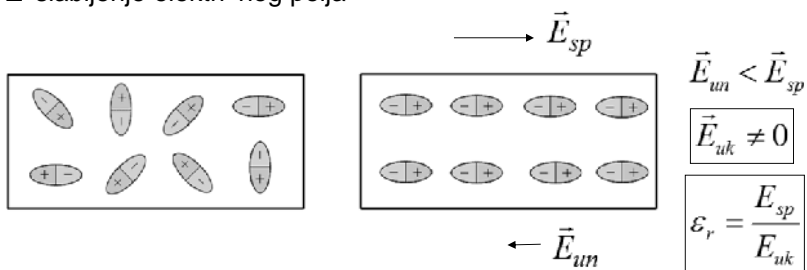
Unutrašnje polje u provodniku poništava spoljašnje polje

- Faradejev kavez
 - Metalna konstrukcija koja služi zaštiti od spoljašnjeg elektri nog polja

Izolatori

■ Izolator u spoljašnjem elektri nom polju

- slabljenje elektri nog polja

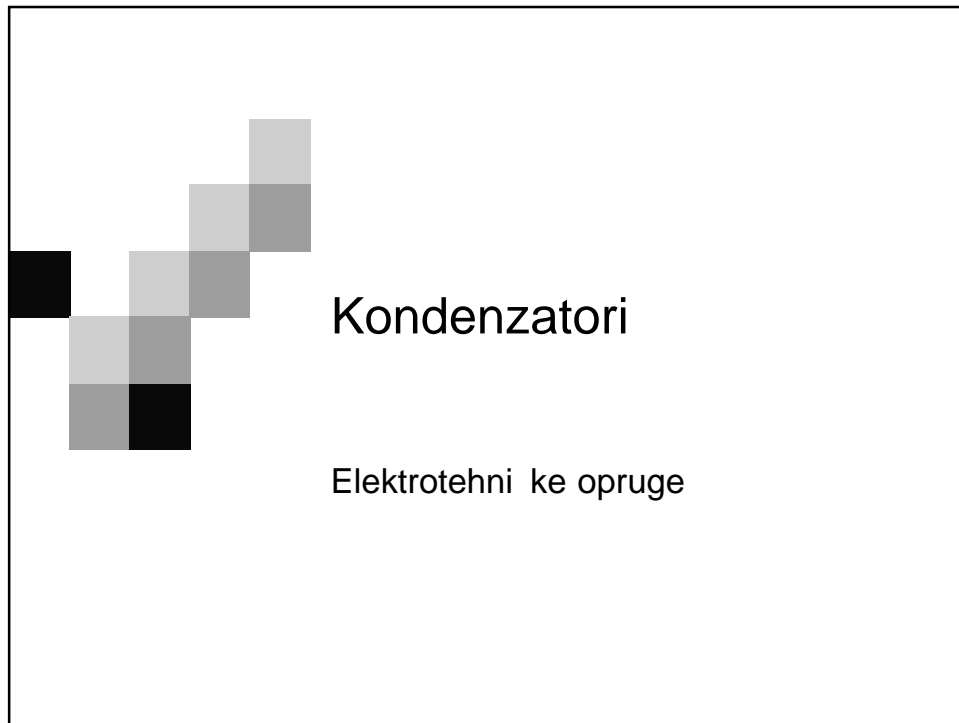


- proboj izolatora
 - dielektri na vrsto a materijala
 - vazduh E_{kr} oko 3MV/m

Indukcija elektri nog polja

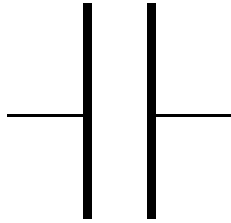
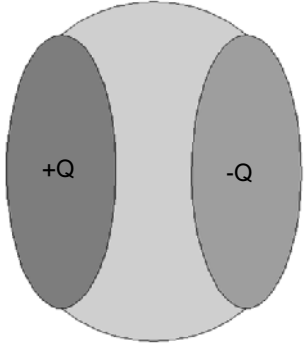
- Gausov zakon ne može da se primeni u materijalnoj sredini jer postoje i indukovana naelektrisanja
- pojam indukcije elektri nog polja
- definicija indukcije elektri nog polja
- diskusija
 - linije sila ja ine elektri nog polja u materijalu
 - linije sila indukcije elektri nog polja u materijalu
- Generalisani Gausov zakon

$$\Phi_{\text{zatvorene}} = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_S Q$$



Pojam kondenzatora

- Sistem
 - elektrotehni ki element
 - dva provodnika
 - naelektrisani jednakim koli inama naelektrisanja suprotnog znaka
 - izme u kojih se nalazi izolator

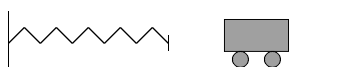


Namena i svrha kondenzatora

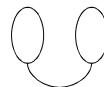
- Prikupljanje naelektrisanja
- Prikupljanje potencijalne energije elektri nog polja
- “Elektri na opruga”



mirovanje i potencijalna energija

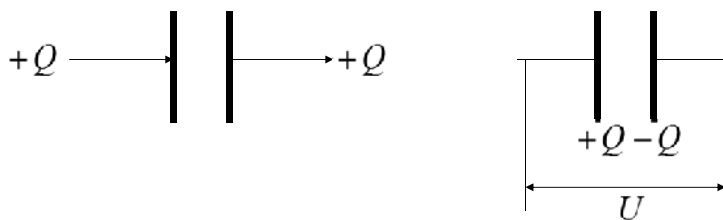


kretanje i kineti ka energija



Kapacitivnost kondenzatora

- Opisuje koliko kondenzator “podnosi” naelektrisanje



$$C = \frac{Q}{U}$$

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{C}{V} = F$$

- Nije isto (mada je sli no) što i kapacitivnost provodnika
- Kapacitivnost kondenzatora je mnogo ve a nego kap. provodnika

Energija kondenzatora

- Rad koji treba uložiti da bi se kondenzator "napunio" ("nabio") naelektrisanjem
- To je potencijalna energija
- Ako se ploče kondenzatora spoje žicom, naelektrisanja će kroz žicu "poleteti" jedna drugima u susret, pretvoriće se potencijalna energija u kinetičku

$$\Delta q: Q_1 = 0 \Rightarrow U_1 = \frac{Q_1}{C} = 0 \Rightarrow A_1 = \Delta q \cdot U_1 = 0$$

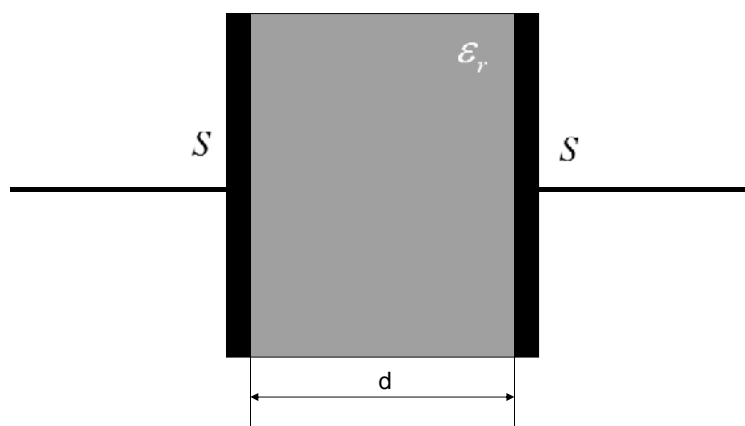
$$\Delta q: Q_2 = q \Rightarrow U_2 = \frac{\Delta q}{C} \Rightarrow A_2 = \Delta q \cdot U_2 = \frac{\Delta q^2}{C}$$

$$\Delta q: Q_3 = 2 \cdot \Delta q \Rightarrow U_3 = \frac{2\Delta q}{C} \Rightarrow A_3 = \Delta q U_3 = \frac{2\Delta q^2}{C}$$

$$A = \sum_{k=1}^N \Delta q \cdot U_k \rightarrow \int_0^Q U \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} \cdot dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

Konstrukcija kondenzatora

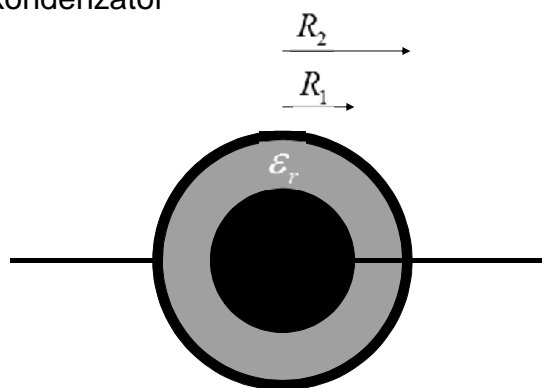
- Ravni kondenzator



$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$$

Konstrukcija kondenzatora

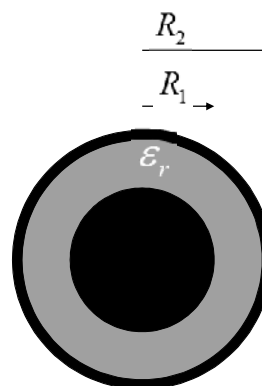
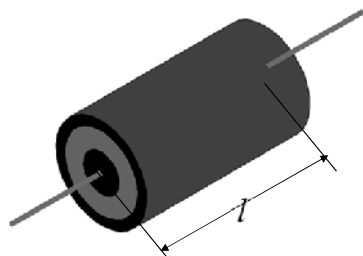
- Sferni kondenzator



$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Konstrukcija kondenzatora

- Cilindri ni kondenzator



$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r l \ln \frac{R}{r}$$

Vezivanje kondenzatora

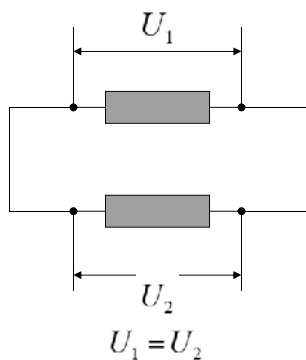
- Kondenzatori se povezuju
 - Namerno
 - Nenamerno

- Na ini povezivanja
 - Paralelno
 - Redno
 - Kombinovano

Povezivanje kondenzatora

Paralelna veza

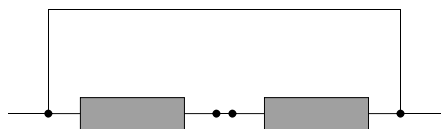
- Dva elektri na elementa su paralelno povezana ako su naponi na njima jednaki



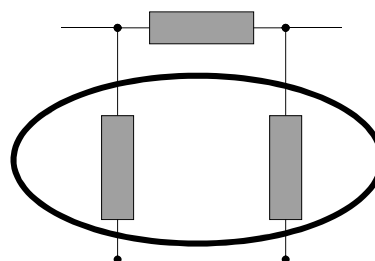
- Oba kraja paralelno vezanih elektri nih elemenata su neposredno povezana

Povezivanje kondenzatora

- este (smrtonosne) greške



JESU PARALELO VEZANI



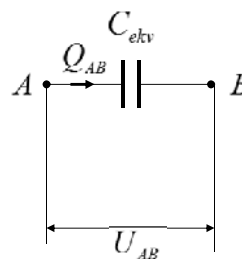
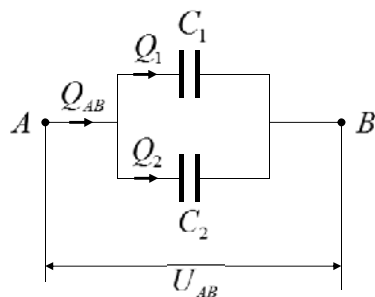
NISU PARALELO VEZANI

- Paralelno nacrtani ne zna i paralelno vezani

Povezivanje kondenzatora

Paralelna veza

- Povezani kondenzatori se mogu zameniti kondenzatorom ekvivalentne kapacitivnosti



$$Q_{AB} = Q_1 + Q_2$$

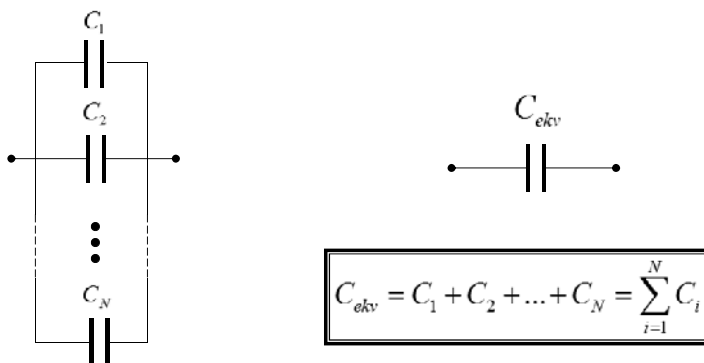
$$C_{ekv} = \frac{Q_{AB}}{U_{AB}} = \frac{Q_1 + Q_2}{U_{AB}} = \frac{Q_1}{U_{AB}} + \frac{Q_2}{U_{AB}} = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_{ekv} = C_1 + C_2}$$

Povezivanje kondenzatora

Paralelna veza

- Slučaj paralelnog povezivanja velikog broja kondenzatora



- Paralelno povezivanje povećava kapacitivnost sistema u odnosu na kapacitivnost komponenti

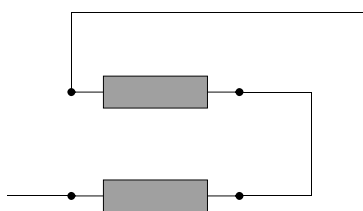
Povezivanje kondenzatora

Redna veza

- Dva električna elementa su redno povezana ako su količine naboja koje kroz njih protiču jednake



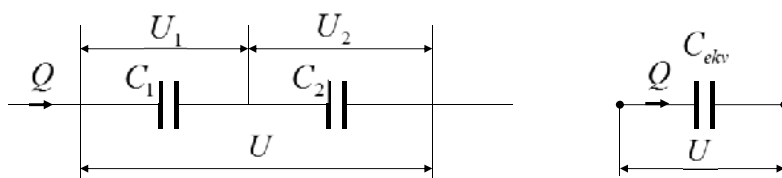
- Samo po jedan kraj redno vezanih električnih elemenata je neposredno povezan



Povezivanje kondenzatora

Redna veza

- Povezani kondenzatori se mogu zameniti kondenzatorom ekvivalentne kapacitivnosti



$$U = U_1 + U_2$$

$$C_{ekv} = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2} \text{ ni u ludilu nije } = \frac{Q}{U_1} + \frac{Q}{U_2} \quad \frac{12}{4} + \frac{12}{2} \neq \frac{12}{6}$$

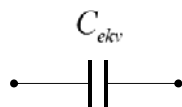
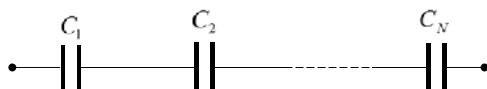
$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{U}{Q} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Povezivanje kondenzatora

Redna veza

- Slučaj rednog povezivanja većeg broja kondenzatora



$$\boxed{\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}}$$

- Redno povezivanje smanjuje kapacitivnost sistema u odnosu na kapacitivnost komponenti

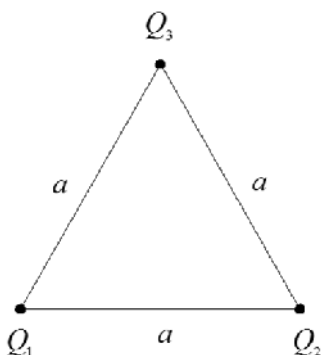
ELEKTROSTATIKA

VEŽBE

1. ZADATAK

Tri tačkasta opterećenja Q_1 , Q_2 i Q_3 nalaze se u temenima jednakostraničnog trougla stranice a , kao na sl.1. Odrediti vektor Kulonove sile na naelektrisanje. Sistem se nalazi u vakuumu. Numerički podaci:

$$Q_1 = Q_2 = 10^{-10} \text{ C} \quad Q_3 = -10^{-10} \text{ C} \quad a = 1 \text{ cm}$$



$$F_{13} = k_0 \frac{Q_1 Q_3}{a^2}$$

$$F_{23} = k_0 \frac{Q_2 Q_3}{a^2}$$

$Q_3 = -Q$
 $\vec{F}_{13} = \vec{F}$ $\vec{F}_{23} = \vec{F}$
 $\pi/6$
 a a
 \vec{F}_3
 a
 $Q_1 = Q$ $Q_2 = Q$

$$F = F_{13} = F_{23} = k_0 \frac{QQ}{a^2} = 9 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

$$F_3 = F_{13} \cos 30^\circ + F_{23} \cos 30^\circ$$

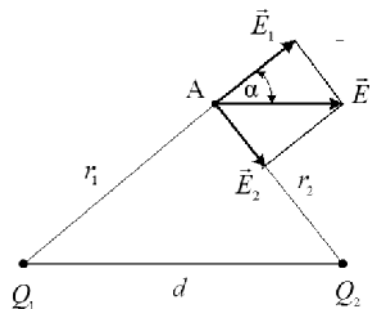
$$F_3 = F \cos 30^\circ + F \cos 30^\circ = 15,57 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

2. ZADATAK

Dva ta kasta naelektrisanja Q_1 i Q_2 nalaze se na me usobnom rastojanju d , u vakuumu. Izra unati elektri no polje u ta ki A, koja se nalazi na rastojanju r_1 od naelektrisanja Q_1 i r_2 od naelektrisanja Q_2 . Numeri ki podaci:

$$Q_1 = 60 \text{ pC} \quad Q_2 = -30 \text{ pC} \quad d = 5 \text{ cm} \quad r_1 = 4 \text{ cm} \quad r_2 = 3 \text{ cm}$$

$$E_1 = k_0 \frac{Q_1}{r_1^2} = 3,375 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad E_2 = k_0 \frac{Q_2}{r_2^2} = 3 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$



$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 4,52 \cdot 10^2 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

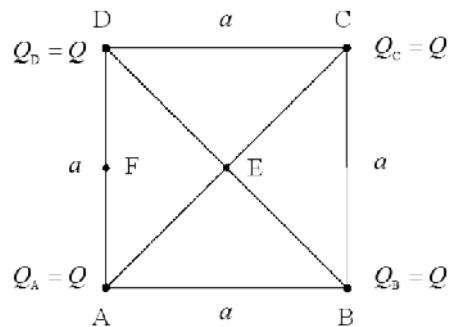
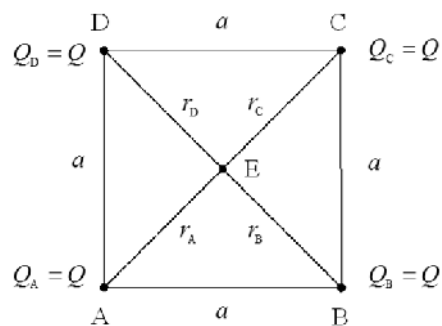
$$\alpha = \arccos \frac{E_1}{E} = 41^\circ 40'$$

3. ZADATAK

1. Četiri tačkasta naelektrisanja iste vrednosti $Q_A=Q_B=Q_C=Q_D=Q$ raspoređena su u temenima A, B, C i D kvadrata stranice a , kao na slici. Sistem se nalazi u vakuumu. Odrediti:

- potencijal u tački E (presek dijagonala kvadrata) i u tački F (sredina jedne od stranica kvadrata), u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti.
- potencijalnu razliku između tačaka E i F.

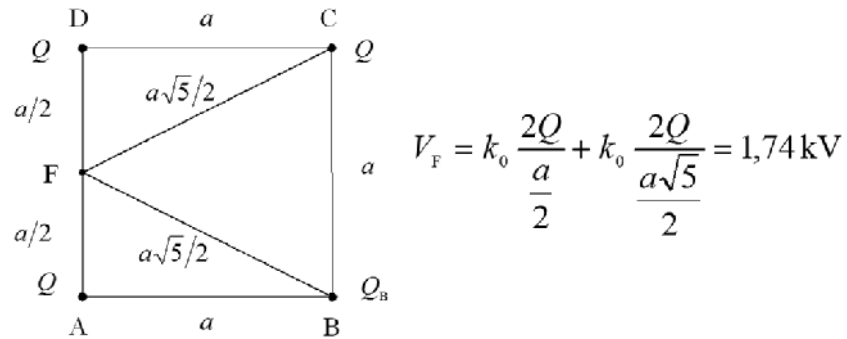
Numerički podaci: $Q = 10 \text{ nC}$ $a = 30 \text{ cm}$

Rešenje:

a) Potencijal u tački E $V_E = k_0 \frac{Q_A}{r_A} + k_0 \frac{Q_B}{r_B} + k_0 \frac{Q_C}{r_C} + k_0 \frac{Q_D}{r_D}$

$$Q_A = Q_B = Q_C = Q_D = Q \quad r_A = r_B = r_C = r_D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V_E = k_0 \frac{4Q}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = k_0 \frac{4\sqrt{2}Q}{a} = 1,2\sqrt{2} \text{ kV.}$$



Tražena razlika potencijala je $U_{EF} = U_E - U_F = -0.63 \text{ kV}$

4. ZADATAK

Ravan vazdušni kondenzator priključen je na izvor jednosmernog napona U . Površina elektroda je S , a razmak između ploha d . Odrediti: a) kapacitivnost kondenzatora; b) količinu elektriciteta na oblogama kondenzatora; c) privlačnu silu između obloga kondenzatora; e) energiju kondenzatora. Poznato je:

$$U = 5 \text{ kV}, \quad S = 75 \text{ cm}^2, \quad d = 1 \text{ cm}.$$

$$\text{a) } C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{75 \cdot 10^{-4}}{10^{-2}} = 6,63 \text{ pF}$$

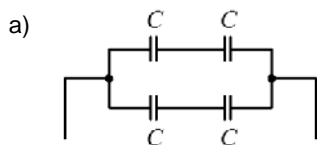
$$\text{b) } Q = CU = 6,63 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^3 = 33,15 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$\text{c) } F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = 8,28 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

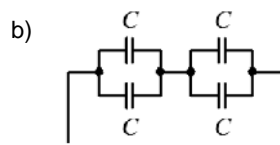
$$\text{d) } W = \frac{QU}{2} = 82,87 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

5. ZADATAK

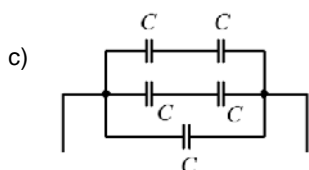
Odrediti ekvivalentne kapacitvnosti za veze kondenzatora prikazane šemama na slikama:



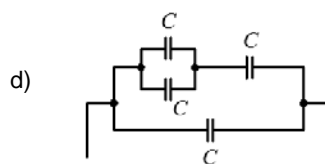
$$C_e = 2 \frac{C \cdot C}{2C} = C;$$



$$C_e = \frac{(C+C)(C+C)}{4C} = C;$$



$$C_e = 2 \frac{C \cdot C}{2C} + C = 2C;$$



$$C_e = \frac{2C \cdot C}{3C} + C = \frac{5C}{3}.$$

6. ZADATAK

Ravan vazdušni kondenzator kapacitvnosti C_0 površine jedne elektrode S priključen je na napon U .

a) Odrediti količinu elektriciteta, površinsko naelektrisanje, električno polje i energiju kondenzatora.

b) Ako se u kondenzator ubaci dielektrik relativne dielektrične konstante ϵ_r , a napon je i dalje priključen, odrediti koliko će se promeniti kapacitvnost, količina elektriciteta, električno polje i energija u odnosu na veličine pod a).

Poznato je: $C_0 = 10 \text{ pF}$ $S = 100 \text{ cm}^2$ $U = 1000 \text{ V}$ $\epsilon_r = 4$

a) $Q_0 = C_0 U = 10 \cdot 10^{-12} \cdot 10^3 = 10^{-8} \text{ C}$

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{S} = \frac{10^{-8}}{100 \cdot 10^{-4}} = 1 \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}$$

$$E_0 = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{10 \cdot 10^{-8}}{8,854 \cdot 10^{-12}} = 112,9 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$W_0 = \frac{Q_0 U}{2} = \frac{10^{-8} \cdot 10^3}{2} = 5 \cdot 10^{-6} = 5 \mu\text{J}$$

b) $C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} = \epsilon_r C_0 = 4C_0$

$$Q_1 = C_1 U = 4C_0 U = 4Q_0$$

$$E_1 = \frac{U}{d} = \frac{Q_1}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{4Q_0}{4\epsilon_0 S} = E_0$$

$$W_1 = \frac{Q_1 U}{2} = 4 \frac{Q_0 U}{2} = 4W_0$$

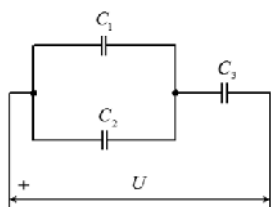
7. ZADATAK

Tri kondenzatora poznatih kapacitivnosti, prikljuena su na izvor napona U i povezana kao na slici.

Odrediti:

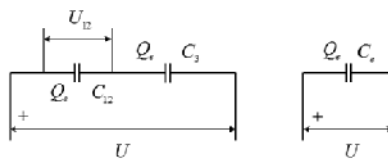
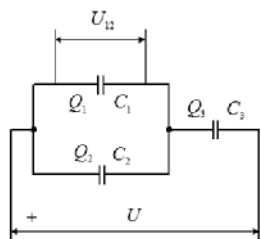
a) količinu elektriciteta, b) napone i c) energije svih kondenzatora;

Poznato je: $C_1 = 6\mu\text{F}$ $C_2 = 8\mu\text{F}$ $C_3 = 10\mu\text{F}$ $U = 1\text{kV}$ $\epsilon_r = 4$



$$C_{12} = C_1 + C_2 = (6 + 8) \cdot 10^{-6} = 14\mu\text{F}$$

$$C_e = \frac{C_{12}C_3}{C_{12} + C_3} = \frac{14 \cdot 10}{24} = 5,83\mu\text{F}$$



$$Q_e = C_e U = 5,83 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 = 5,83\text{mC} \quad Q_{12} = Q_3 = Q_e = 5,83\text{mC}$$

$$U_{12} = \frac{Q_e}{C_{12}} = \frac{5,83 \cdot 10^{-3}}{14 \cdot 10^{-6}} = 420\text{V}$$

$$Q_1 = C_1 U_{12} = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 0,42 \cdot 10^3 = 2,5\text{mC}$$

$$Q_2 = C_2 U_{12} = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 0,42 \cdot 10^3 = 3,36\text{mC}$$

$$U_3 = \frac{Q_3}{C_3} = U - U_{12} = 1000 - 420 = 580\text{V}$$

$$W_1 = \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{(2,5)^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-6}} = 0,521\text{J}$$

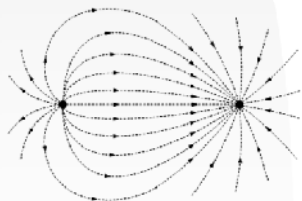
$$W_2 = \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{(3,36)^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8 \cdot 10^{-6}} = 0,705\text{J}$$

$$W_3 = \frac{Q_3^2}{2C_3} = \frac{(5,83)^2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 1,699\text{J}$$

Stranica:I-1

Elektrostatika

- Coulombov zakon.
- Homogeno i nehomogeno elektri no polje.
- Elektri no polje nabijene beskona ne ravnine.
- Elektri no polje to kastog naboja.
- Elektri no polje vrlo dugog ravnog vodi a.
- Elektri no polje nabijene kugle.
- Elektri no polje nabijenog valjka.

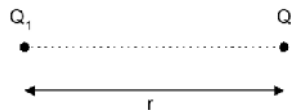


Stranica:I-2

1. zadatak

Dva to kasta naboja istog predznaka nalaze se u zraku na udaljenosti r jedan od drugoga. Odrediti iznos, smjer i orijentaciju djelovanja sile izme u naboja.

- $Q_1 = 85 \text{ } [\mu\text{C}]$
- $Q_2 = 16.6 \text{ } [\text{nC}]$
- $r = 6.5 \text{ } [\text{cm}]$



Po etna stranica



Stranica:I-3

Uvodni pojmovi

- Dva to kasta naboja, istog predznaka, djeluju jedan na drugoga odbojnom elektri nom silom i to:

- Naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 odbojnom silom F_{12} .
- Naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1 odbojnom silom F_{21} .



- Dva to kasta naboja razli itog predznaka, djeluju jedan na drugoga privla nom elektri nom silom i to:

- Naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 privla nom silom F_{12} .
- Naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1 privla nom silom F_{21} .



Po etna stranica



Stranica:I-4

- Po iznosu sile F_{12} i F_{21} su jednake po iznosu:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

- ϵ - dielektri na konstanta medija u kojem se problem promatra.
 $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$; ϵ_0 je tzv. apsolutna dielektri na konstanta (vrijednost 8.854×10^{-12} [As/Vm]) i predstavlja dielektri nost vakuma, dok ϵ_r predstavlja relativnu dielektri nu konstantu koja ovisi o samom mediju (za vakuum $\epsilon_r = 1$).
- r - udaljenost izme u naboja Q_1 i Q_2

- Elektri na sila je veli ina koja je predstavljana vektorom koji ima svoj iznos, smjer i orijentaciju.



Po etna stranica



Stranica: I-5

Rješenje zadatka

- Naboji su istog predznaka tako da su sile odbojne:



- Po iznosu sile su jednake i iznose:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \cdot \frac{85 \cdot 10^{-6} \cdot 16.6 \cdot 10^{-9}}{(6.5 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$|\vec{F}| = 3 \text{ [N]}$$



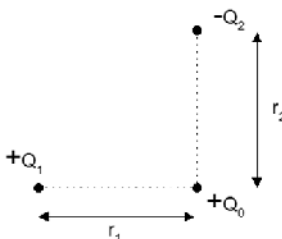
Po etna stranica

Stranica: I-6

2. zadatak

Pozitivni to kasti naboj Q_1 i negativni to kasti naboj Q_2 nalaze se od pozitivnog to kastog naboja Q_0 na udaljenosti $r_1 = r_2$. Njihov me usobni položaj prikazan je na slici. Odredite iznos rezultantne sile na naboj Q_0 te skicirajte vektorski dijagram sila za taj naboj.

- $Q_1 = 10^{-6} \text{ [C]}$
- $Q_2 = -2 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}$
- $Q_0 = 10^{-6} \text{ [C]}$
- $r_1 = r_2 = 3 \text{ [cm]}$

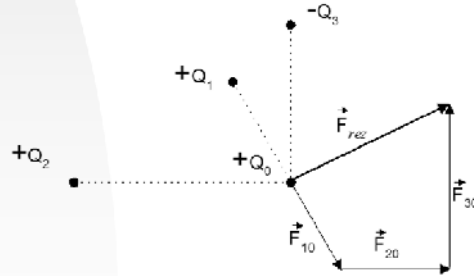


Po etna stranica

Stranica: I-7

Uvodni pojmovi

- Ako na to kasti naboj djeluje više naboja tada se za izra unavanje ukupne sile primjenjuje princip superpozicije.
- Princip superpozicije kaže da je rezultatno djelovanje svih naboja jednako zbroju doprinosa pojedinih naboja.
- Ukupna sila na naboj Q_0 jednaka je vektorskom zbroju svih sila koje djeluju na naboj Q_0 :



$$\vec{F}_{rez} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

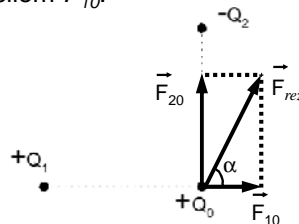


Po etna stranica

Stranica: I-8

Rješenje zadatka

- Na naboj Q_0 djeluju dva naboja, Q_1 i Q_2 . Naboj Q_1 djeluje odbojnom silom F_{10} :



- Naboj Q_2 djeluje privlačnom silom F_{20} .
- Rezultantna sila jednaka je vektorskom zbroju sila F_{10} i F_{20} .

$$\vec{F}_{rez} = \sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = |\vec{F}_{rez}| \angle \alpha$$



Po etna stranica

Stranica:I-9

- Budu i da su vektori sila F_{10} i F_{20} me usobno okomiti vrijedi:

$$|\vec{F}_{rez}| = \sqrt{|\vec{F}_{10}|^2 + |\vec{F}_{20}|^2}$$

- Iznos sila F_{10} i F_{20} :

$$|\vec{F}_{10}| = F_{10} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \cdot \frac{10^{-6} \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} = 10 \text{ [N]}$$

$$|\vec{F}_{20}| = F_{20} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} = 20 \text{ [N]}$$

- Iznos rezultantne sile F_{rez} :

$$F_{rez} = \sqrt{F_{10}^2 + F_{20}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.4 \text{ [N]}$$

- Budu i da je sila vektor njen smjer i orijentacija se određuje iz pravokutnog trokuta, odnosno:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{20}}{F_{10}} \Rightarrow \alpha = 63^\circ \quad \boxed{|\vec{F}_{rez}| = 22.4 \angle 63^\circ \text{ [N]}}$$



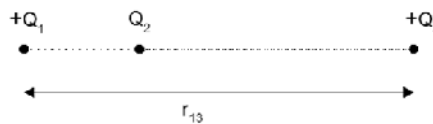
Po etna stranica

Stranica:I-10

3. zadatak

Tri mala tijela, elektri ni naboja $Q_1 = +4 \cdot 10^{-11}$ [C], nepoznati elektri ni naboj Q_2 i $Q_3 = +10^{-11}$ [C], zauzimaju u vakuumu položaj kao što je prikazano na slici. Odredite položaj i elektri ni naboj Q_2 tako da se sva tijela pod djelovanjem Coulomb-ovih sila nalaze u mirovanju. Zadano:

- $r_{13} = 5$ [cm]

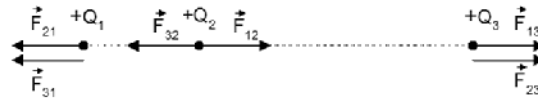


Po etna stranica

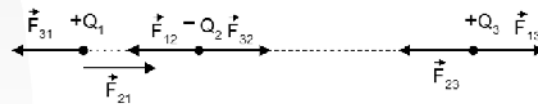
Stranica:l-11

Rješenje zadatka

- Da bi električni naboj bio u mirovanju ukupna električna sila koja na njega djeluje mora biti jednaka 0.
- Pretpostavimo predznak naboja $Q_2 > 0$.



- Iz slike je vidljivo da se uvjet mirovanja može ispuniti za naboj Q_2 , ali uz pozitivan naboj Q_2 naboji Q_1 i Q_3 ne mogu biti u mirovanju. Zbog toga naboj Q_2 mora biti negativan.



Početna stranica



Stranica:l-12

- Uvjeti mirovanja:

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = 0 \Rightarrow |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{31}|$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0 \Rightarrow |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{32}|$$

$$\vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 0 \Rightarrow |\vec{F}_{13}| = |\vec{F}_{23}|$$

odnosno:

$$\left| k \cdot \frac{Q_2 \cdot Q_1}{r_{12}^2} \right| = \left| k \cdot \frac{Q_3 \cdot Q_1}{r_{13}^2} \right| \Rightarrow Q_2 \cdot r_{13}^2 = Q_3 \cdot r_{12}^2$$

$$\left| k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \right| = \left| k \cdot \frac{Q_3 \cdot Q_2}{r_{23}^2} \right| \Rightarrow Q_1 \cdot r_{23}^2 = Q_3 \cdot r_{12}^2$$

$$\left| k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_3}{r_{13}^2} \right| = \left| k \cdot \frac{Q_3 \cdot Q_2}{r_{23}^2} \right| \Rightarrow Q_1 \cdot r_{23}^2 = Q_2 \cdot r_{13}^2$$

$$r_{13} = r_{12} + r_{23}$$



Početna stranica



Stranica: I-13

- Rješenjem ovog sustava jednačbi kao rješenja dobije se:

$$r_{12} = 3.33 \text{ [cm]}$$

$$r_{23} = 1.67 \text{ [cm]}$$

$$Q_2 = 4.4 \text{ [pC]}$$

- Budu i da znamo da je naboj Q_2 negativan, vrijedi:

$$Q_2 = -4.4 \text{ [pC]}$$



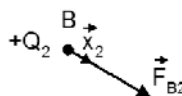
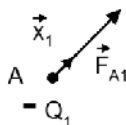
Po etna stranica

Stranica: I-14

4. zadatak

U to ke A i B nekog ve formiranog polja unešeni su naboji Q_1 i Q_2 . Pri tome je na naboj Q_1 opažena sila F_{A1} u smjeru jedini nog vektora x_1 , dok je na naboj Q_2 opažena sila F_{B2} , u smjeru jedini nog vektora x_2 (kao na slici). Ako naboji Q_1 i Q_2 zamijene mjesta u prostoru (Q_1 do e u to ku B, a Q_2 u to ku A), odredite iznose i smjerove sila na njih. Me usobno djelovanje naboja Q_1 i Q_2 i obrnuto zanemarujemo.

- $Q_1 = -2 \text{ [}\mu\text{C]}$
- $Q_2 = 5 \text{ [}\mu\text{C]}$
- $F_{A1} = 0.04 \text{ [N]}$, u smjeru vektora x_1
- $F_{B2} = 0.05 \text{ [N]}$, u smjeru vektora x_2



Po etna stranica

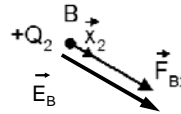
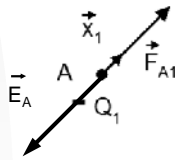
Stranica: I-15

Rješenje zadatka

- Ako se to kasti naboj stavi u prostor u kojem djeluje elektri no polje, na naboj e djelovati elektri na sila. Veza izme u vektora elektri nog polja i elektri ne sile je:

$$\vec{F}_{el} = Q \cdot \vec{E}$$

- U zadatku iz poznatih vektora sila na naboje Q_1 i Q_2 mogu se odrediti vektori elektri nog polja u to kama A i B.
- Kod pozitivnog naboja vektor sile i polja su u istom smjeru, a kod negativnog naboja vektor sile i polja su u suprotnom smjeru:

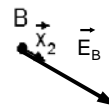


Po etna stranica



Stranica: I-16

- Formirano elektri no polje u to kama A i B ima smjer prema slici:



- Zapisano pomo u vektora smjera:

$$\vec{E}_A = \frac{\vec{F}_{A1}}{Q_1} = \frac{0.04 \cdot \vec{x}_1}{-2 \cdot 10^{-6}} = -20 \cdot \vec{x}_1 [\text{kV/m}]$$

$$\vec{E}_B = \frac{\vec{F}_{B2}}{Q_2} = \frac{0.05 \cdot \vec{x}_2}{5 \cdot 10^{-6}} = 10 \cdot \vec{x}_2 [\text{kV/m}]$$

- Nakon što naboji zamijene mjesta, na njih djeluju sile :

$$\vec{F}_{A2} = \vec{E}_A \cdot Q_2 = -20 \cdot 10^3 \cdot \vec{x}_1 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = -0.1 \cdot \vec{x}_1 [\text{N}]$$

$$\vec{F}_{B1} = \vec{E}_B \cdot Q_1 = 10 \cdot 10^3 \cdot \vec{x}_2 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) = -0.02 \cdot \vec{x}_2 [\text{N}]$$

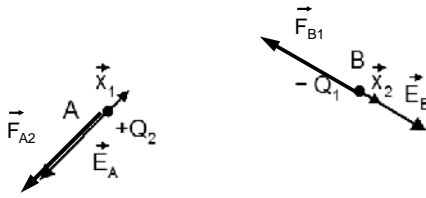


Po etna stranica



Stranica:I-17

- Vektori sila na naboje u to kama A i B:



- Iz slike je vidljivo da je sila na negativan naboj Q_1 suprotnog smjera od polja u to ki B, a na pozitivan naboj Q_2 istog smjera kao i polje u to ki A.



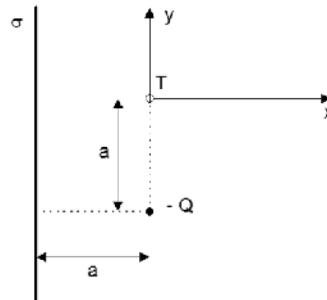
Po etna stranica

Stranica:I-18

5. zadatak

Ispred ravnine nabijene nabojem plošne gusto σ nalazi se na udaljenosti a negativan to kasti naboj Q . Odredite izraz za vektor jakosti elektri nog polja E (koordinatne osi zadane prema slici) koje ravnina i to kasti naboj stvaraju u to ki T, a tako er odredite i iznos polja E . Zadano:

- $\sigma = +2 \text{ [nAs/m}^2\text{]}$
- $Q = -4\pi \text{ [nAs]}$
- $a = 1 \text{ [m]}$



Po etna stranica

Stranica:I-19

Uvodni pojmovi

- HOMOGENO ELEKTRINO POLJE je polje koje u svim točkama prostora ima jednak iznos i smjer (primjer; ravnomjerno nabijena beskonačna ravnina).
- NEHOMOGENO ELEKTRINO POLJE je polje koje u svim točkama prostora ima različit iznos i/ili smjer (primjer; točkasti naboj, kugla, valjak, itd.).
- Gauss-ov teorem:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$$

- Primjena Gauss-ovog teorema za izračunavanje el. polja točkastog naboja:

$$D \cdot \oiint_S dS = E \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = Q$$

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r^2}$$



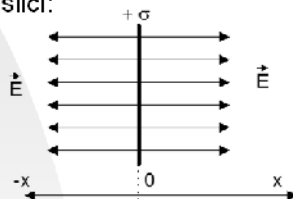
Po etna stranica

Stranica:I-20

Primjeri homogenog električnog polja

Beskonačna ravnina nabijena plošnim nabojem σ .

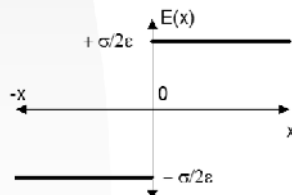
- U okolini pozitivno nabijene ravnine polje izgleda kao na slici:



- Po iznosu polje je:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

- Funkcija ovisnosti polja o udaljenosti od ravnine izgleda kao na slici:

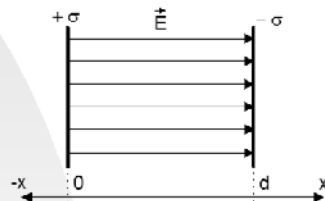


Po etna stranica

Stranica: I-21

Dvije suprotno nabijene paralelne ravnine

- Za ovaj slučaj polje izgleda kao:

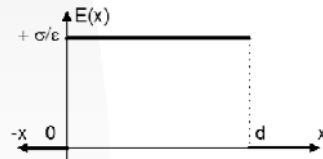


- Po iznosu polje između dvije ravnine je,

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

dok izvan nema polja.

- Funkcija ovisnosti polja o udaljenosti od pozitivno nabijene ravnine izgleda kao na slici:



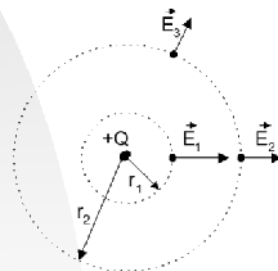
Po etna stranica

Stranica: I-22

Primjeri nehomogenog električnog polja

Točkasti naboj

- U okolini pozitivno nabijenog točkastog naboja električno polje za označene točke ima prikazane smjerove:



- Električno polje ovisi o udaljenosti od točkastog naboja:

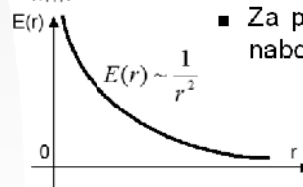
$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- r - udaljenost od naboja Q do promatrane točke.

- Za prikazano polje točkastog naboja vrijedi:

$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$$

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2|$$

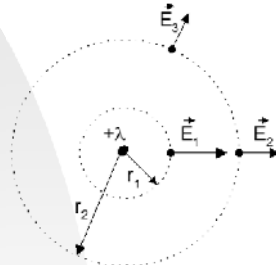


Po etna stranica

Stranica:I-23

Vrlo dugi ravni vodi nabijen linijskim nabojem λ

- U okolini pozitivno nabijenog ravnog vodi a elektri no polje za ozna ene to ke ima prikazane smjerove:



- Elektri no polje ovisi o udaljenosti od vodi a

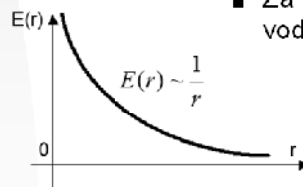
$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r}$$

- r - udaljenost od vodi a do promatrane to ke.

- Za prikazano polje ravnog vodi a:

$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$$

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2|$$



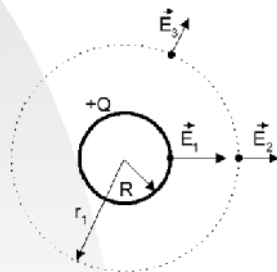
Po etna stranica



Stranica:I-24

Pozitivno nabijena kugla

- U okolini pozitivno nabijene kugle polumjera R elektri no polje za ozna ene to ke ima prikazane smjerove :



- Unutar kugle nema polja, a izvan se mijenja po zakonu:

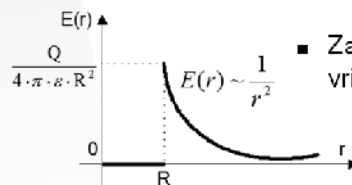
$$|\vec{E}| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- r - udaljenost od središta kugle

- Za prikazano polje kugle vrijedi:

$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$$

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2|$$



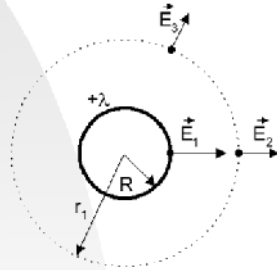
Po etna stranica



Stranica:I-25

Pozitivno nabijeni valjak

- U okolini pozitivno nabijenog valjka polumjera R elektri no polje za ozna ene to ke ima prikazane smjerove:



- Unutar valjka nema polja, a izvan se mijenja po zakonu:

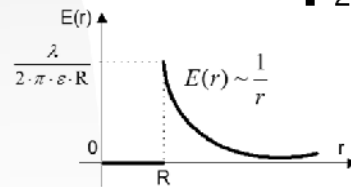
$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \frac{1}{r}$$

- r - udaljenost od središta valjka

- Za prikazano polje valjka :

$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$$

$$|\vec{E}_1| > |\vec{E}_2|$$



Po etna stranica



Stranica:I-26

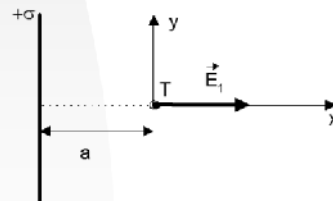
Rješenje zadatka

- Polje u to ki T stvaraju dva nabijena tijela, pozitivno nabijena ravnina i negativni to kasti naboj.
- Ukupno polje odre uje se metodom superpozicije:

Za svako pojedina no tijelo odre uje se njegov doprinos (polje koje bi stvorilo bez drugih nabijenih tijela u blizini).

Ukupno polje jednako je vektorskoj sumi pojedinih polja.

- Pozitivna nabijena ravnina stvara polje u to ki T:



Polje je u smjeru osi x i iznosi:

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{i}$$

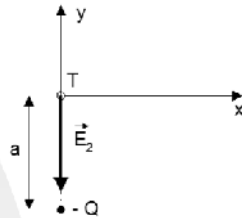


Po etna stranica



Stranica: I-27

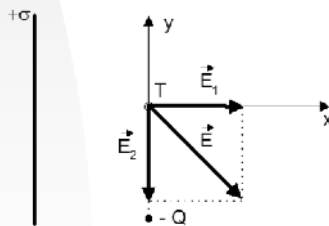
- Negativno nabijeni to kasti naboj stvara polje u to ki T:



Polje je u smjeru osi -y i iznosi:

$$\vec{E}_2 = -\frac{|Q|}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot a^2} \cdot \vec{j}$$

- Ukupno polje jednako je vektorskom zbroju polja:



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



Po etna stranica

Stranica: I-28

- Uvrstivši vrijednosti za pojedina polja dobiva se ukupno polje u to ki T:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \cdot \vec{i} + \left(-\frac{|Q|}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot a^2} \cdot \vec{j} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \cdot \vec{i} - \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 1^2} \cdot \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{E} = 113 \cdot \vec{i} - 113 \cdot \vec{j} \text{ [V/m]}}$$

- Iznos vektora polja odre uje se kao:

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{113^2 + 113^2}$$

$$\boxed{|\vec{E}| = 160 \text{ [V/m]}}$$

- Na drugi na in zapisan vektor polja:

$$\vec{E} = |\vec{E}| \angle \alpha$$

$$\boxed{\vec{E} = 160 \angle -45^\circ \text{ [V/m]}}$$



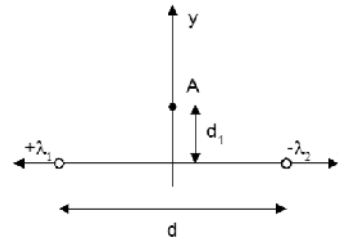
Po etna stranica

Stranica:I-29

6. zadatak

Dva duga ravna vodi a, polumjera r_0 zanemarivo malog u odnosu na njihov međusobni razmak, nabijena su linijskim nabojima λ_1 i λ_2 , predznaka prikazanih na slici. Ako se u točki A postavi negativan taški naboj Q, odredite silu koja djeluje na taj naboj. Zadáno:

- $\lambda_1 = +2$ [nAs/m]
- $\lambda_2 = -4$ [nAs/m]
- $Q = -4$ [pAs]
- $d = 1$ [m]
- $d_1 = 0.25$ [m]



Po etna stranica



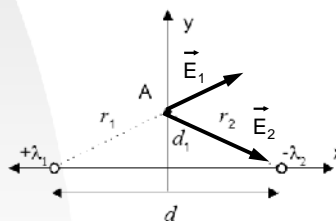
Stranica:I-30

Rješenje zadatka

- Na naboj Q djeluje el. polje koje stvaraju dva vodi a.

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}_A$$

- Električno polje E_A određuje se metodom superpozicije.
- Lijevi vodi stvara el. polje E_1 , a desni vodi el. polje E_2 :



$$|\vec{E}_1| = \frac{\lambda_1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_1}$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{\lambda_2}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_2}$$

$$r_1 = r_2 = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + d_1^2}$$

- Ukupno el. polje u točki A, E_A :

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



Po etna stranica



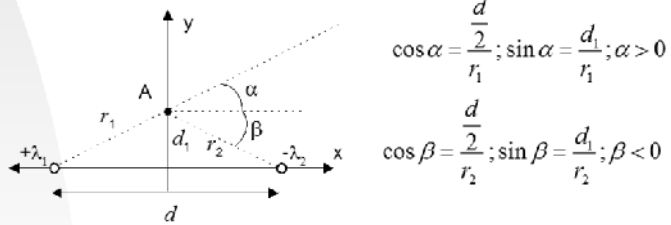
Stranica:I-31

- Ukupno polje najlakše je odrediti ako oba vektora polja prikažemo pomoću jedinice njihovih vektora:

$$\vec{E}_1 = |\vec{E}_1| \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + |\vec{E}_1| \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j}$$

$$\vec{E}_2 = |\vec{E}_2| \cdot \cos \beta \cdot \vec{i} + |\vec{E}_2| \cdot \sin \beta \cdot \vec{j}$$

- Kuteve α i β odredimo iz slike:



- Ukupno el. polje u točki A, \vec{E}_A :

$$\vec{E}_A = |\vec{E}_1| \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + |\vec{E}_1| \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} + |\vec{E}_2| \cdot \cos \beta \cdot \vec{i} + |\vec{E}_2| \cdot \sin \beta \cdot \vec{j}$$



Po etna stranica

Stranica:I-32

$$\vec{E}_A = \left(|\vec{E}_1| \cdot \cos \alpha + |\vec{E}_2| \cdot \cos \beta \right) \cdot \vec{i} + \left(|\vec{E}_1| \cdot \sin \alpha + |\vec{E}_2| \cdot \sin \beta \right) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{E}_A = \left(\frac{|\lambda_1|}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_1} \cdot \frac{d}{r_1} + \frac{|\lambda_2|}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_2} \cdot \frac{d}{r_2} \right) \cdot \vec{i} +$$

$$\left(\frac{|\lambda_1|}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_1} \cdot \frac{d_1}{r_1} - \frac{|\lambda_2|}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_2} \cdot \frac{d_1}{r_2} \right) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{E}_A = \frac{d}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left(\frac{|\lambda_1|}{r_1^2} + \frac{|\lambda_2|}{r_2^2} \right) \cdot \vec{i} + \frac{d_1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \left(\frac{|\lambda_1|}{r_1^2} - \frac{|\lambda_2|}{r_2^2} \right) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{E}_A = \frac{d \cdot (|\lambda_1| + |\lambda_2|)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 + d_1^2 \right)} \cdot \vec{i} + \frac{d_1 \cdot (|\lambda_1| - |\lambda_2|)}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \left(\left(\frac{d}{2} \right)^2 + d_1^2 \right)} \cdot \vec{j}$$

- Ako se uvrste poznate vrijednosti dobije se:

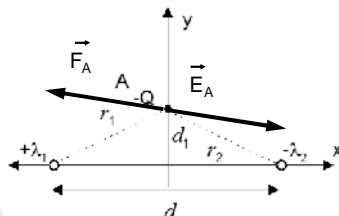
$$\vec{E}_A = 173 \cdot \vec{i} - 29 \cdot \vec{j} \text{ [V/m]} = 175 \angle -9^\circ \text{ [V/m]}$$



Po etna stranica

Stranica: I-33

- Sila na negativan naboj Q u točki A onda ima smjer kao na slici:



- Vektor sile je:

$$\vec{F}_A = Q \cdot \vec{E}_A = -4 \cdot 10^{-12} \cdot (173 \cdot \vec{i} - 29 \cdot \vec{j}) = -0.69 \cdot \vec{i} + 0.11 \cdot \vec{j} \text{ [nN]}$$

$$\boxed{\vec{F}_A = 0.7 \angle 171^\circ \text{ [nN]}}$$



Po etna stranica

Stranica: I-34

7. zadatak

Točkasti naboj nalazi se u središtu šuplje metalne nenabijene kugle vanjskog polumjera R_2 i unutrašnjeg polumjera R_1 . Odredite el. polje u točkama A i B za sljedeće slučajeve:

- točkasti naboj Q u središtu nenabijene kugle
- kugla nabijena nabojem Q bez točkastog naboja u središtu
- točkasti naboj Q u središtu kugle nabijene nabojem Q
- točkasti naboj Q u središtu kugle nabijene nabojem Q istog iznosa, ali suprotnog predznaka

Zadano:

- $Q = +9 \text{ [nC]}$
- $R_1 = 14 \text{ [mm]}$
- $R_2 = 17 \text{ [mm]}$
- $r_A = 1 \text{ [cm]}$
- $r_B = 2 \text{ [cm]}$

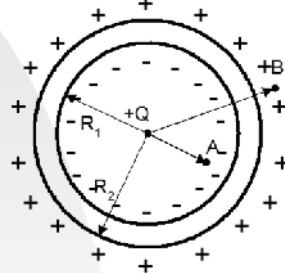


Po etna stranica

Stranica: I-35

Rješenje zadatka

Prvi slučaj: točkasti naboj Q u središtu nenabijene kugle.



- U točki A (unutar šuplje kugle) el. polje stvara točkasti naboj.

$$|\vec{E}_A| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_A^2}$$

$$|\vec{E}_A| = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 808 \text{ [kV/m]}$$

- Pod utjecajem el. polja koje stvara točkasti naboj dolazi do influencije naboja na kugli ($-Q$ na unutarnjoj plohi kugle i $+Q$ na vanjskoj plohi kugle).
- El. polje u točki B onda iznosi:

$$|\vec{E}_B| = \frac{Q - Q + Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2} = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}$$

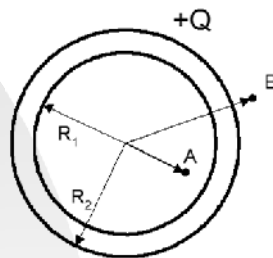
$$|\vec{E}_B| = 202 \text{ [kV/m]}$$



Početna stranica

Stranica: I-36

Drugi slučaj: nabijena kugla bez točkastog naboja u središtu



- Unutar kugle nema naboja tako da nema ni polja u točki A:

$$|\vec{E}_A| = 0$$

- El. polje u točki B stvara nabijena kugla:

$$|\vec{E}_B| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2} = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}$$

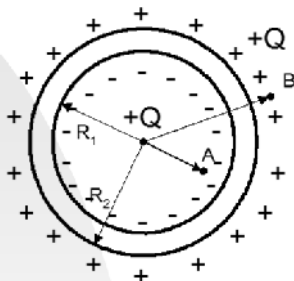
$$|\vec{E}_B| = 202 \text{ [kV/m]}$$



Početna stranica

Stranica: I-37

Treći slučaj: točkasti naboj Q u središtu nabijene kugle (Q)



- Unutar kugle el. polje stvara točkasti naboj Q:

$$|\vec{E}_A| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_A^2}$$

$$|\vec{E}_A| = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 808 [\text{kV/m}]$$

- Pod utjecajem el. polja koje stvara točkasti naboj dolazi do influencije naboja na kugli (-Q na unutarnjoj plohi kugle i +Q na vanjskoj plohi kugle).
- El. polje u točki B onda iznosi:

$$|\vec{E}_B| = \frac{Q - Q + Q + Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2} = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}$$

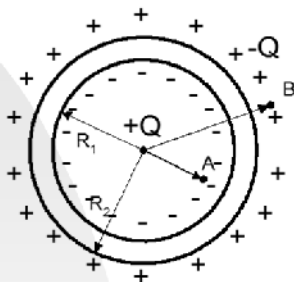
$$|\vec{E}_B| = 404 [\text{kV/m}]$$



Početna stranica

Stranica: I-38

Četvrti slučaj: točkasti naboj Q u središtu nabijene kugle (-Q)



- Unutar kugle el. polje stvara točkasti naboj Q:

$$|\vec{E}_A| = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_A^2}$$

$$|\vec{E}_A| = \frac{9 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 808 [\text{kV/m}]$$

- Pod utjecajem el. polja koje stvara točkasti naboj dolazi do influencije naboja na kugli (-Q na unutarnjoj plohi kugle i +Q na vanjskoj plohi kugle).
- El. polje u točki B onda iznosi:

$$|\vec{E}_B| = \frac{Q - Q + Q - Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2} = \frac{0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r_B^2}$$

$$|\vec{E}_B| = 0 [\text{kV/m}]$$

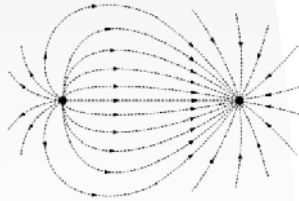


Početna stranica

Stranica:II- 1

Elektrostatika

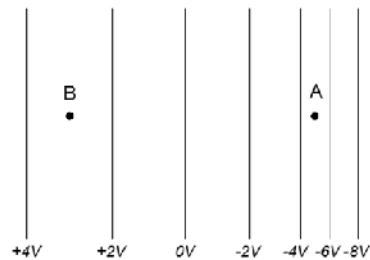
- Veza elektri nog polja i potencijala.
- Elektri ni potencijal.
- Potencijalna energija.
- Rad.
- Zakon o o uvanju energije.



Stranica:II- 2

1. zadatak

Na slici su prikazane ekvipotencijalne plohe nekog elektrostatskog polja. Odredite u kakvom su odnosu iznosi sila F_A i F_B koje djeluju na pozitivan to kasti naboj. Tako er, odredite smjerove vektora sila F_A i F_B .



Po etna stranica



Stranica:II- 3

Uvodni pojmovi

- Svakoj točki prostora u kojoj postoji električno polje može se pridijeliti skalarna veličina - električni potencijal. Pri tome je el. potencijal funkcija el. polja:

$$\varphi = f(\vec{E})$$

- Potencijal promatrane točke:

$$\varphi_{\text{promatrane točke}} = - \int_{\text{referentna točka}}^{\text{promatrana točka}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ako se el. polje mijenja samo u smjeru osi x, onda vrijedi:

$$\varphi_{\text{promatrane točke}} = - \int_{\text{referentna točka}}^{\text{promatrana točka}} \vec{E}(x) \cdot d\vec{x}$$

- Potencijal neke točke se definira u odnosu na referentnu točku za koju vrijedi:

$$\varphi_{\text{referentne točke}} = 0$$



Početna stranica



Stranica:II- 4

Uvodni pojmovi

- El. polje se također može prikazati kao funkcija potencijala:

$$\vec{E} = g(\varphi)$$

- Ovisnost polja o potencijalu:

$$E(x) = - \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Smjer porasta električnog potencijala suprotan je smjeru vektora električnog polja.

Iznos električnog polja je jednak brzini promjene električnog potencijala.

- Polje električnog potencijala prikazuje se ekvipotencijalnim plohami (plohami istog potencijala).



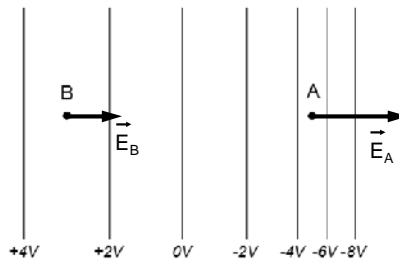
Početna stranica



Stranica:II- 5

Rješenje zadatka

- Da bi se odredio smjer sile na naboj q potrebno je prvo odrediti smjer elektri nog polja.
- Smjer elektri nog polja je suprotan od smjera porasta potencijala tako da za prikazano elektrostatsko polje vektori polja u to kama A i B su sljede i:



- Kako se radi o silama na pozitivan naboj i smjerovi sila u to kama A i B su istog smjera kao i vektori polja.

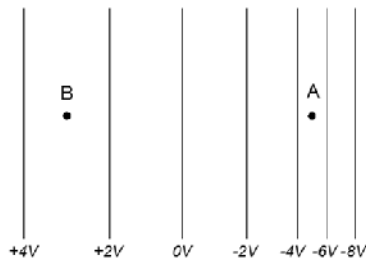
Po etna stranica



Stranica:II- 6

- Iznosi polja su proporcionalni brzini promjene potencijala. Za prikazano polje vrijedi:

$$\left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)_A > \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)_B$$



- Kako je sila proporcionalna polju vrijedi:

$$|\vec{F}_A| > |\vec{F}_B|$$

Po etna stranica

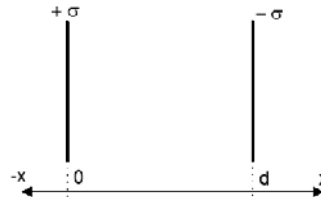


Stranica:II- 7

2. zadatak

Nacrtajte funkciju promjene potencijala izme u dvije raznoimeno nabijene ravnine uz razli ito definirane referentne to ke:

- a) $x_{\text{ref}} = 0$
- b) $x_{\text{ref}} = d/2$
- c) $x_{\text{ref}} = d$



Po etna stranica

Stranica:II- 8

Rješenje zadatka

- Polje izme u dvije ravnine je homogeno:

$$E(x) = E \quad \text{za } 0 < x < d$$

Potencijal bilo koje to ke izme u dvije ravnine je:

$$\varphi(x) = - \int_{x_{\text{ref}}}^x E \cdot dx = -E \cdot x \Big|_{x_{\text{ref}}}^x$$

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot x_{\text{ref}}$$

za $x_{\text{ref}} = 0$:

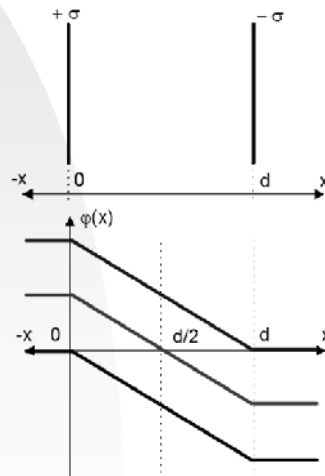
$$\varphi(x) = -E \cdot x$$

za $x_{\text{ref}} = d/2$:

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d/2$$

za $x_{\text{ref}} = d$:

$$\varphi(x) = -E \cdot x + E \cdot d$$



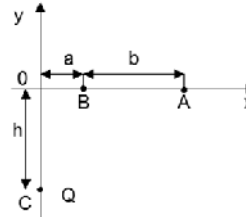
Po etna stranica

Stranica:II- 9

3. zadatak

To kasti naboj Q nalazi se u točki C . Položaj dviju točaka A i B prikazan je na slici. Odredite napon U_{AB} . Ukoliko se točka A nalazi na potencijalu φ_A odredite točku na x osi u kojoj je potencijal imao vrijednost 0 [V].
Zadano:

- $Q = 27.82 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-9}$ [As]
- $\varphi_A = -46$ [V]
- $a = 1$ [m]
- $b = 3$ [m]
- $h = 2$ [m]
- $\varepsilon = \varepsilon_0$



Početna stranica



Stranica:II- 10

Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u nekom prostoru može se odrediti na dva načina:
 - 1 Najprije se na osnovu zadane raspodjele naboja odredi električno polje (na osnovu poznatih postupaka dosada razmatranih) u prostoru. Zatim se uz zgodno odabranu referentnu točku polje potencijala traži po definiciji:

$$\varphi(x) = - \int_{x_{ref}}^x \vec{E}(x) \cdot d\vec{x}$$

- 2 Zadana raspodjela naboja promatra se kao skup točkastih naboja ("model točkastog naboja"). Ukupan potencijal nalazi se superpozicijom, skalarni doprinosi (sumom ili integralom), doprinosa tih elementarnih naboja. Osim modela točkastog naboja, nekada se mogu koristiti i drugi modeli naboja (nabijeni štapić, prsten, ploča).

* različitim izborom referentne točke dobivamo različite iznose potencijala, ali su razlike potencijala uvijek biti jednake za bilo koje dvije točke prostora.



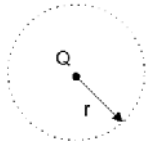
Početna stranica



Stranica:II- 11

Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u okolini to kastog naboja može se odrediti na sljede i na in:



$$\varphi(r) = - \int_{r_{ref}}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

- Za definiranu referentnu to ku u beskona nosti vrijedi:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

- Napon izme u dviju to aka u polju to kastog naboja:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right) - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{ref}} \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$



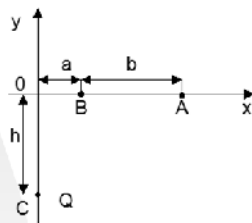
Po etna stranica



Stranica:II- 12

Rješenje zadatka

- Potencijal to ka A i B može se izra unati kao:



$$\varphi_A = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$r_A = \sqrt{h^2 + (a+b)^2}$$

$$\varphi_B = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$r_B = \sqrt{h^2 + a^2}$$

- Napon U_{AB} je onda:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right) - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + (a+b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right)$$



Po etna stranica



Stranica:II- 13

- Iznos napona U_{AB} :

$$U_{AB} = \frac{27.82 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2^2 + (1+3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right) = -79[\text{V}]$$

- Napon se može odrediti bez određivanja referentne točke, jer je razlika potencijala između dvije točke u prostoru neovisna o odabranoj referentnoj točki.
- Iz poznatog potencijala točke A može se odrediti udaljenost ekvipotencijalne plohe referentnog potencijala u zadatku:

$$\varphi_A = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{ref}} \right) \quad r_{ref} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r_A} - \varphi_A$$

$$r_{ref} = \frac{27.82}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}} - \frac{1}{\sqrt{20}} - (-46) = 2.83[\text{m}]$$



- Na osi x to je točka: $x_{ref} = \sqrt{r_{ref}^2 - h^2} = \sqrt{2.83^2 - 2^2} = 2[\text{m}]$

Početna stranica

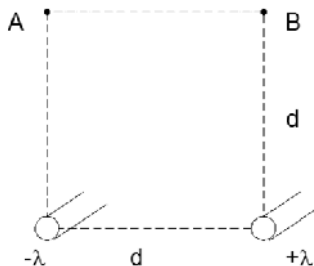


Stranica:II- 14

4. zadatak

Odredite rad prilikom pomicanja pokusnog točkastog naboja Q_0 iz točke A u točku B. Točke A i B predstavljaju vrhove zamišljenog kvadrata koji leži u ravnini okomitoj na dva paralelna i suprotno nabijena ravna vodiča (slika). Zadano:

- $Q_0 = -4 \cdot 10^{-12} [\text{As/m}]$
- $|\lambda| = 1.77 \cdot 10^{-8} [\text{As/m}]$
- $\epsilon = \epsilon_0$



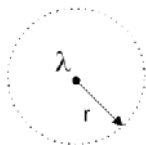
Početna stranica



Stranica:II- 15

Uvodni pojmovi

- Polje potencijala u okolini nabijenog ravnog vodiča može se odrediti na sljedeći način:



$$\varphi(r) = - \int_{r_{ref}}^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_{ref}}{r}$$

- Napon između dviju točaka u polju ravnog vodiča:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$U_{AB} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_{ref}}{r_A} - \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_{ref}}{r_B} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \ln \frac{r_B}{r_A}$$



Početna stranica

Stranica:II- 16

Uvodni pojmovi

- Potencijalna energija potrebna za premještanje naboja u električnom polju u točku A:

$$W_{pA} = Q \cdot \varphi_A$$

primjer: el. polje stvorilo neko drugo nabijeno tijelo (točkasti naboj, ravni vodič, kugla, ploča, itd.).

- Rad pri pomicanju točkasti naboja definiran je kao:

$$A = Q \cdot (\varphi_{početak} - \varphi_{kraj})$$

Predznak rada:

- $A > 0$; pomicanje pod utjecajem sile električnog polja = smanjenje potencijalne energije
- $A < 0$; pomicanje pod utjecajem vanjske sile = povećanje potencijalne energije



Početna stranica

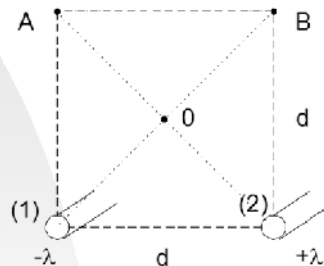
Stranica:II- 17

Rješenje zadatka

- Rad pri pomicanju pokusnog naboja Q_0 je:

$$\Lambda = Q_0 \cdot (\varphi_A - \varphi_B)$$

Da bi se odredili potencijali to aka A i B potrebno je odrediti referentnu to ku. Pretpostavimo da se ona nalazi u središtu kvadrata.



- Potencijalu u točki A doprinose oba vodi a:

$$\varphi_A = \varphi_{A1} + \varphi_{A2}$$

$$\varphi_A = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{r_{10}}{r_{A1}} + \frac{+\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{r_{20}}{r_{A2}}$$

$$\varphi_A = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{d\sqrt{2}}{2} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{2}{d\sqrt{2}}$$



Po etna stranica

Stranica:II- 18

$$\varphi_A = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left(-\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Potencijal u točki B određuje se na isti način:

$$\varphi_B = \varphi_{B1} + \varphi_{B2}$$

$$\varphi_B = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{r_{10}}{r_{B1}} + \frac{+\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{r_{20}}{r_{B2}}$$

$$\varphi_B = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{d\sqrt{2}}{2} + \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{2}{d\sqrt{2}}$$

$$\varphi_B = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left(-\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \sqrt{2}$$

- Rad pri pomicanju naboja onda iznosi:

$$\Lambda = Q_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \sqrt{2} \right) = Q_0 \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \ln \frac{1}{2} = +880 [\text{pWs}]$$

gdje nam pozitivan predznak govori o dobivenom radu.

Po etna stranica



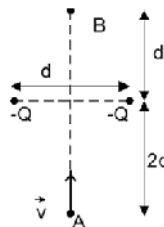
Stranica:II- 19

5. zadatak

Zadana su dva točkasta naboja Q na udaljenosti d prema slici. Koliko mora iznositi minimalna brzina elektrona u to ki A udaljenoj $2d$ od spojnice naboja, da bi on mogao sti i u to ku B (udaljenu d od spojnice naboja) s druge strane spojnice. Elektron se giba po simetrali spojnice.

Zadano:

- $Q = -10 \cdot 10^{-11}$ [C]
- $d = 0.1$ [m]
- $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ [kg]
- $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ [C]



Po etna stranica



Stranica:II- 20

Rješenje zadatka

- Potencijal u nekoj točki na spojnici A-B može se izraziti kao:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

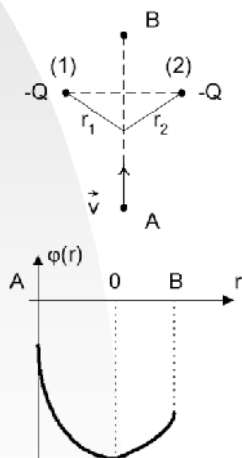
$$\varphi = \frac{-Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{ref}} \right) + \frac{-Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{ref}} \right)$$

Budući da je $r_1 = r_2$ i uz pretpostavljenu referentnu točku u beskonačnosti, za potencijal vrijedi:

$$\varphi = \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{r_1}$$

Funkcija potencijala mijenja se kao što je prikazano na slici:

Da bi elektron stigao do točke B potrebno je nadvladati potencijalnu barijeru prikazanu na slici.



Po etna stranica



Stranica:II- 21

- Elektron se od to ke 0 do to ke B giba pod utjecajem elektri nog polja.
- Me utim, da bi elektron stigao do to ke 0 na elektron se mora djelovati vanjskim utjecajem, odnosno vrijedi sljede e:

$$W_{kmA} + W_{polA} = W_{pol0}; \quad W_{km0} = 0$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + (-q_e) \cdot \varphi_A = (-q_e) \cdot \varphi_0$$

$$r_A = \sqrt{(2d)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = d \frac{\sqrt{17}}{2}; \quad r_0 = \frac{d}{2}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = -q_e \cdot \left(\frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r_0} - \frac{-Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r_A} \right) = \frac{q_e \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A} \right)$$

$$v = \sqrt{\frac{q_e \cdot Q}{\pi \cdot \epsilon \cdot m} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A} \right)} = \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-11}}{\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} \left(\frac{2}{0.1} - \frac{2}{0.1 \sqrt{17}} \right)}$$

$$v = 3.1 \cdot 10^6 \text{ [m/s]}$$



Po etna stranica



Stranica:II- 22

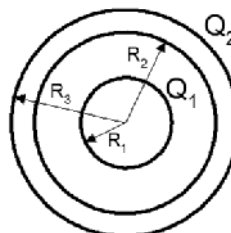
6. zadatak

U metalnoj kugloj ljsuci (R_2, R_3) koncentri no se nalazi metalna kugla polumjera R_1 (slika). Kuglina ljsuka nabijena je nabojem Q_2 , a metalna kugla nabojem Q_1 . Nacrtajte dijagrame funkcije promjene el. polja $E(r)$ i potencijala $\varphi(r)$ u zavisnosti o udaljenosti r od središta sustava ako je:

- $Q_1 = -2 \text{ [nC]}, Q_2 = 0, r_{ref} = \infty$
- $Q_1 = +2 \text{ [nC]}, Q_2 = +2 \text{ [nC]}, r_{ref} = \infty$
- $Q_1 = +2 \text{ [nC]}, Q_2 = -2 \text{ [nC]}, r_{ref} = \infty$

Zadano:

- $R_1 = 2 \text{ [cm]}$
- $R_2 = 4 \text{ [cm]}$
- $R_3 = 4.5 \text{ [cm]}$

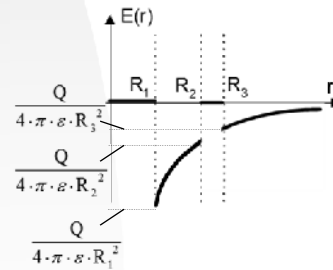
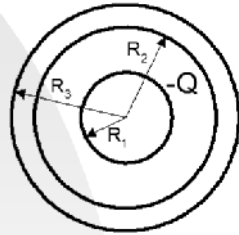


Po etna stranica



Stranica: II- 23

Rješenje zadatka

Prvi slučaj: $E(r)$ Za $r < R_1$:

$$E(r) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

Unutar metala nema polja; za $R_2 < r < R_3$:

$$E(r) = 0$$

Zbog el. influencije polje za $r > R_3$ iznosi:

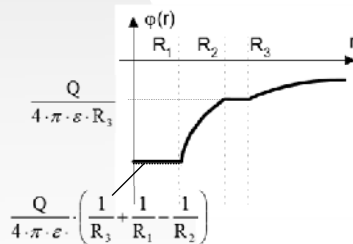
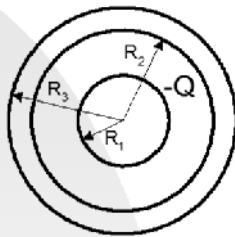
$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$



Po etna stranica



Stranica: II- 24

Prvi slučaj: $\varphi(r)$ 

Referentna točka nalazi se u beskonačnosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Za $r > R_3$:

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r_{ref}} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r}$$

Za $R_2 < r < R_3$ potencijal je konstantan jer u metalu nema polja:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_3}$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$\varphi(r) = U_{R_2} + \varphi(R_2)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_2} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_3}$$

Za $r < R_1$ potencijal je konstantan:

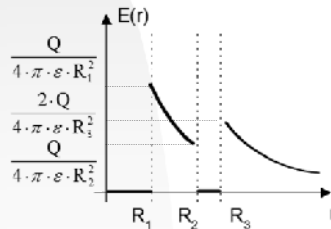
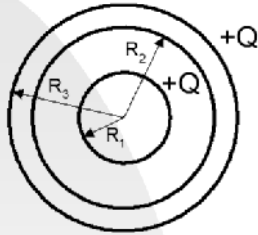
$$\varphi(r) = \varphi(R_1) = U_{R_1 R_2} + \varphi(R_2)$$

Po etna stranica



Stranica:II- 25

Drugi slu aj: E(r)

Za $r < R_1$:

$$E(r) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

Za $R_2 < r < R_3$:

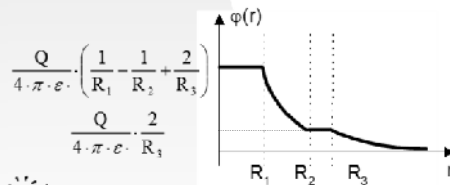
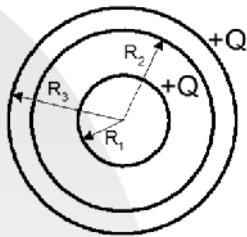
$$E(r) = 0$$

Zbog nabijene vanjske kugle i el. influencije polje za $r > R_3$:

$$E(r) = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

Po etna stranica

Stranica:II- 26

Drugi slu aj: $\varphi(r)$ 

Referentna to ka nalazi se u beskona nosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Za $r > R_3$:

$$\varphi(r) = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} - \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r_{ref}} = \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r}$$

Za $R_2 < r < R_3$ potencijal je konstantan jer u metalu nema polja:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3)$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$\varphi(r) = U_{rR_2} + \varphi(R_2)$$

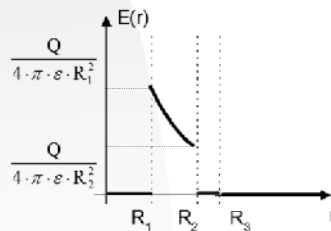
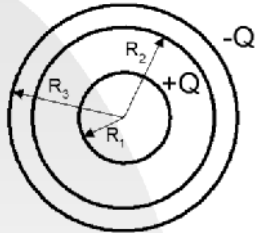
$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_2} + \frac{2 \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_3}$$

Za $r < R_1$ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r) = \varphi(R_1) = U_{R_1R_2} + \varphi(R_2)$$

Po etna stranica

Stranica:II- 27

Tre i slu aj: $E(r)$ Za $r < R_1$:

$$E(r) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$E(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2}$$

Za $R_2 < r < R_3$:

$$E(r) = 0$$

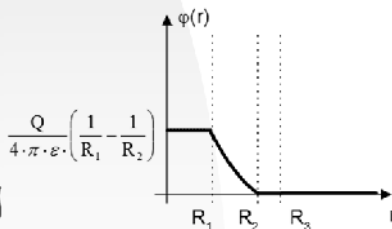
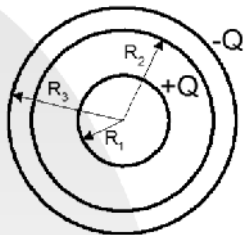
Zbog nabijene vanjske kugle i el. influencije polje za $r > R_3$:

$$E(r) = \frac{Q - Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} = 0$$

Po etna stranica



Stranica:II- 28

Tre i slu aj: $\varphi(r)$ 

Referentna to ka nalazi se u beskona nosti:

$$\varphi_{ref} = 0$$

Budu i da izvan sustava nema polja, za $r > R_3$:

$$\varphi(r) = 0$$

Za $R_2 < r < R_3$ potencijal je konstantan jer u metalu nema polja:

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) = \varphi(R_3) = 0$$

Za $R_1 < r < R_2$:

$$\varphi(r) = U_{rR_2} + \varphi(R_2)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot R_2}$$

Za $r < R_1$ potencijal je konstantan:

$$\varphi(r) = \varphi(R_1) = U_{R_1R_2} + \varphi(R_2)$$

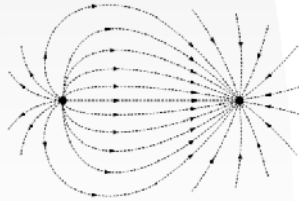
Po etna stranica



Stranica:III- 1

Elektrostatika

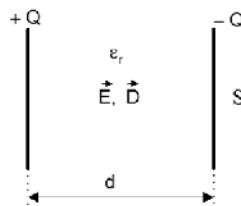
- Elektri no polje na granici dva dielektrika.
- Plo asti kondenzator.
- Cilindri ni kondenzator.
- Kuglasti kondenzator.



Stranica:III- 2

1. zadatak

Dvije metalne plo e sa zrakom kao izolatorom bile su spojene na izvor napona U , a zatim odspojene od njega. Nakon toga je razmak plo a pove an na dvostruki iznos, a zrak je zamijenjen tincjem ($\epsilon_r = 6$). Odredite što se doga a s elektri nim poljem, naponom izme u plo a, kapacitetom kondenzatora, nabojem na plo ama i energijom u kondenzatoru.



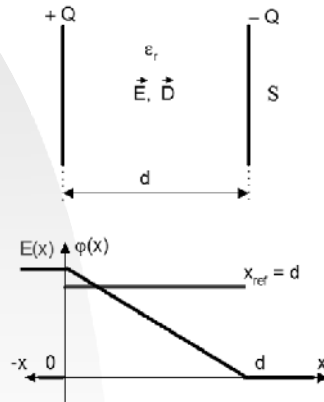
Po etna stranica



Stranica:III- 3

Uvodni pojmovi

- Za pločasti kondenzator vrijedi:



$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

$$U = \frac{Q}{C}$$

$$U = E \cdot d$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d}$$

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{E \cdot D}{2} \cdot S \cdot d$$

El. polje je konstantno.

Potencijal je linearna funkcija.

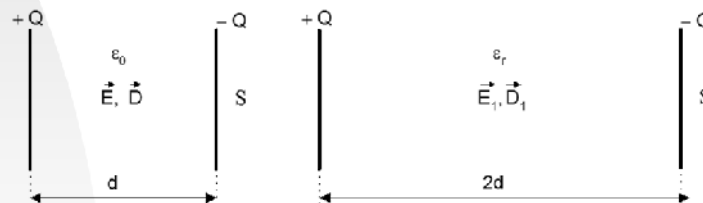
Početna stranica



Stranica:III- 4

Rješenje zadatka

- Na ploče kondenzatora je bio spojen napon U i ploče su se nabile nabojem Q .
- Nakon toga je kondenzator odspojen, povećan je razmak među pločama i ubačen je dielektrik.



- Budući da je kondenzator odspojen od izvora napajanja nakon ubacivanja izolatora vrijedi:

$$Q = konst.$$

Početna stranica



Stranica:III- 5

- Vektor dielektri nog pomaka D:

$$D = \frac{Q}{S}; D_1 = \frac{Q}{S} \Rightarrow D = D_1$$

- El. polje E:

$$E = \frac{D}{\epsilon_0}; E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \Rightarrow \frac{E_1}{E} = \frac{\frac{D_1}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}}{\frac{D}{\epsilon_0}} = \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{1}{6}$$

- Napon U:

$$U = E \cdot d; U_1 = E_1 \cdot 2d \Rightarrow \frac{U_1}{U} = \frac{E_1 \cdot 2d}{E \cdot d} = \frac{1}{3}$$

- Kapacitet C:

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}; C_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{2d} \Rightarrow \frac{C_1}{C} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{2d}}{\epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}} = \frac{\epsilon_r}{2} = 3$$

- Energija W:

$$W = \frac{Q \cdot U}{2}; W_1 = \frac{Q \cdot U_1}{2} \Rightarrow \frac{W_1}{W} = \frac{\frac{Q \cdot U_1}{2}}{\frac{Q \cdot U}{2}} = \frac{U_1}{U} = \frac{1}{3}$$



Početna stranica

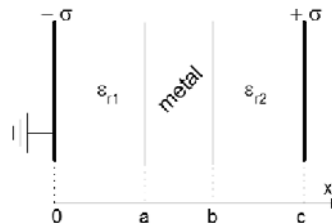


Stranica:III- 6

2. zadatak

Na slici su prikazane dvije plohe nabijene nabojem površinske gustoće σ između kojih se nalaze dva sloja dielektrika uz njih te sloj metala u sredini.

- Skicirajte funkcije jakosti polja $E(x)$ i potencijala $\phi(x)$.
- Izvedite izraze za funkciju potencijala $\phi(x)$ za $0 < x < c$ uz pretpostavku da su poznati σ , a , b , c te $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

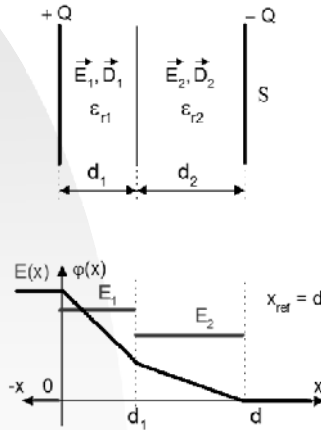


Početna stranica



Uvodni pojmovi

- Plo asti kondenzator s dva dielektrika (serija):



$$D_1 = D_2$$

$$E_1 \neq E_2$$

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot S}; E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot S}$$

$$C_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot \frac{S}{d_1}; C_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot \frac{S}{d_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_1 = E_1 \cdot d_1; U_2 = E_2 \cdot d_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

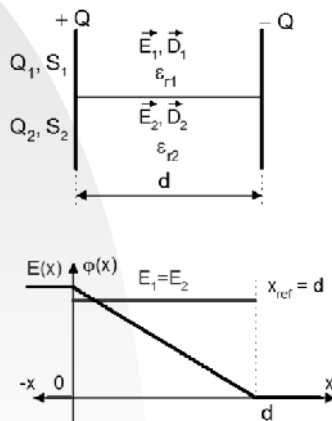
$$W = W_1 + W_2$$

Za $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ el. polje i potencijal izgledaju kao na slici:



Uvodni pojmovi

- Plo asti kondenzator s dva dielektrika (paralela):



$$E_1 = E_2 = E$$

$$D_1 \neq D_2$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$D_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E; D_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E$$

$$C_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot \frac{S_1}{d}; C_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot \frac{S_2}{d}$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$U_1 = U_2 = U = E_1 \cdot d = E_2 \cdot d$$

$$W = W_1 + W_2$$

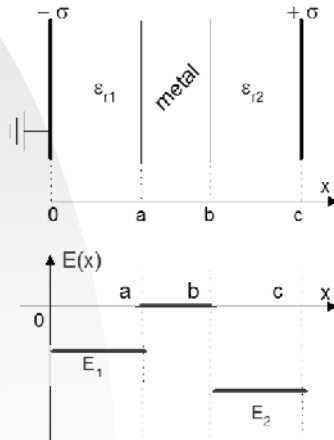
El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:



Stranica:III- 9

Rješenje zadatka

- Prvo odredimo el. polje.



El. polje u prvom dielektriku iznosi:

$$E_1 = -\frac{D_1}{\epsilon} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}}$$

El. polje u metalu:

$$E_{\text{metal}} = 0$$

El. polje u drugom dielektriku iznosi:

$$E_2 = -\frac{D_2}{\epsilon} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}}$$



Početna stranica

Stranica:III- 10

- El. potencijal određuje se na sljedeći način:

$$\varphi(x) = -\int_{x_{ref}}^x E(x) dx$$

Referencijalno je u ishodištu:

$$\varphi(0) = 0$$

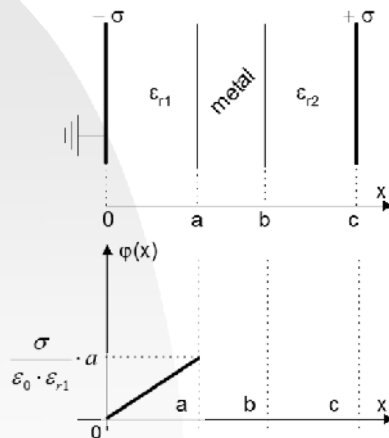
Za $0 < x < a$:

$$\varphi(x) = -\int_0^x E(x) dx = -\int_0^x -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} dx$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot x \Big|_0^x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot x$$

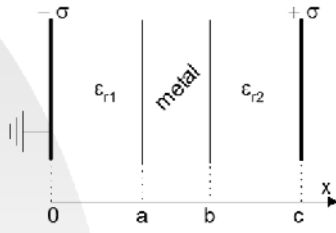
Za $x = a$:

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot a$$



Početna stranica

Stranica:III- 11



Za $a < x < b$:

$$\varphi(x) = -\int_0^a E_1(x) dx - \int_a^x E_{metal}(x) dx$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) - \int_a^x 0 dx = \varphi(a)$$

$$\varphi(b) = \varphi(a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot a$$

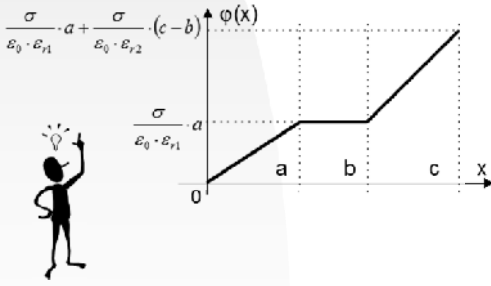
Za $b < x < c$:


$$\varphi(x) = -\int_0^a E_1(x) dx - \int_a^b E_{metal}(x) dx - \int_b^x E_2(x) dx$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot x \Big|_b^x$$

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot x + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot a - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot b$$

Za $x = c$:

$$\varphi(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot a + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot (c - b)$$


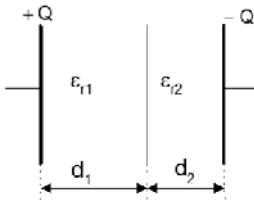

Po etna stranica 


Stranica:III- 12

3. zadatak

Plo asti kondenzator sadrži dva sloja dielektrika prema slici. Odredite maksimalnu vrijednost napona U pri kojem ne e do i do proboja, ako je zadano:

- $E_{1p} = 10$ [kV/m]
- $E_{2p} = 20$ [kV/m]
- $d_1 = 7$ [mm]
- $d_2 = 3$ [mm]
- $\epsilon_{r1} = 5$
- $\epsilon_{r2} = 2$

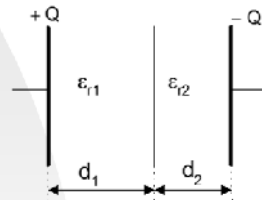



Po etna stranica 

Stranica:III- 13

Rješenje zadatka

- Probojno polje označava maksimalno el. polje kod kojeg u određenom dielektriku ne dođe do proboja.



Za serijski spojene kondenzatore vrijedi:

$$D_1 = D_2$$

$$E_1 \neq E_2$$

- Ako pretpostavimo da je el. polje u prvom dielektriku imati svoju maksimalnu vrijednost vrijedi:

$$E_1 = E_{1p} = 10 \text{ [kV/m]}$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_{1p} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_2 \Rightarrow E_2 = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot E_{1p} = 25 \text{ [kV/m]} > E_{2p}$$

- Ovaj slučaj ne zadovoljava, jer iako ne dolazi do proboja u prvom dielektriku u drugom dolazi.



Početna stranica

Stranica:III- 14

- Uz pretpostavku da je u drugom dielektriku maksimalno polje vrijedi:

$$E_2 = E_{2p} = 20 \text{ [kV/m]}$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_1 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_{2p} \Rightarrow E_1 = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \cdot E_{2p} = 8 \text{ [kV/m]} < E_{1p}$$

- Znači el. polja u prvom i drugom dielektriku iznose:

$$E_1 = 8 \text{ [kV/m]}$$

$$E_2 = E_{2p} = 20 \text{ [kV/m]}$$

- Maksimalni napon onda iznosi:

$$U_{\max} = U_1 + U_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2$$

$$U_{\max} = 8 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 10^{-3} + 20 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}$$

$$U_{\max} = 116 \text{ [V]}$$



Početna stranica

Stranica:III- 15

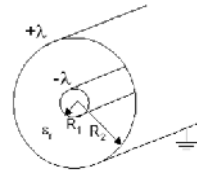
4. zadatak

Za koaksijalni kabel s polietilenskom izolacijom kao na slici (negativan linijski naboj na unutrašnjem vodi u) potrebno je odrediti:

- potencijal unutarnjeg vodi a
- ako el. polje u polietilenu ne smije prije i vrijednost od $3 \cdot 10^7$ [V/m] koliki je maksimalni napon koji se smije priključiti između vodi a kabela
- kapacitet, ako je zadana dužina kabela l

Zadano:

- $\epsilon_r = 2.3$
- $\lambda = 1.15 \cdot 10^{-8}$ [As/m]
- $2 \cdot R_1 = 2.6$ [mm]
- $2 \cdot R_2 = 9.5$ [mm]
- $E_{\max} = 30$ [MV/m]
- $l = 500$ [m]



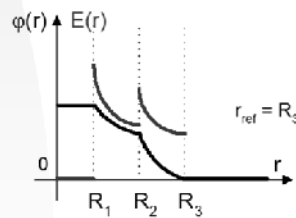
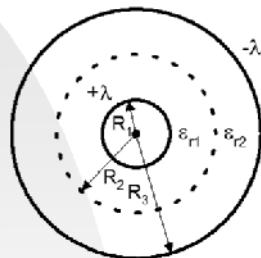
Po etna stranica



Stranica:III- 16

Uvodni pojmovi

- Cilindri ni kondenzator s dva dielektrika (serija):



$$E_1(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot r}; E_2(r) = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot r}$$

$$D_1(R_2) = D_2(R_2)$$

$$C_1 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}; C_2 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot l}{\ln \frac{R_3}{R_2}}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_{R1R2} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$U_{R2R3} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \ln \frac{R_3}{R_2}$$

$$W = W_1 + W_2$$



El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:

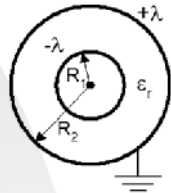
Po etna stranica



Stranica:III- 17

Rješenje zadatka

- U kondenzatoru ($R_1 < r < R_2$) se el. polje mijenja kao :



$$E(r) = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot r}$$

Potencijal se određuje u odnosu na ref. točku koja se nalazi na R_2 :

$$\varphi(r) = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \ln \frac{r_{ref}}{r}$$

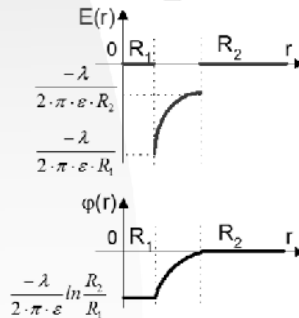
Potencijal unutarnjeg vodiča:

$$\varphi(R_1) = \frac{-\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\varphi(R_1) = \frac{-1.15 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2.3} \ln \frac{4.75 \cdot 10^{-3}}{1.3 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{\varphi(R_1) = -116 \text{ [V]}}$$

El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:



Po etna stranica

Stranica:III- 18

- Maksimalni napon se postiže u slučaju kada el. polje ima maksimalni iznos. Da ne bi došlo do proboja dielektrika to max. polje je na mjestu R_1 :

$$E_{\max}(R_1) = \frac{\lambda_{\max}}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot R_1}$$

- Maksimalni napon je jednak:

$$U_{R1R2} = \frac{-|\lambda_{\max}|}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$|\lambda_{\max}| = E_{\max}(R_1) \cdot 2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot R_1 \Rightarrow U_{R1R2} = -E_{\max}(R_1) \cdot R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$U_{R1R2} = -30 \cdot 10^6 \cdot 1.3 \cdot 10^{-3} \cdot \ln \frac{4.75 \cdot 10^{-3}}{1.3 \cdot 10^{-3}}$$

$$\boxed{U_{R1R2} = -51 \text{ [kV]}}$$

- Kapacitet kondenzatora:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2.3 \cdot 500}{\ln \frac{4.75 \cdot 10^{-3}}{1.3 \cdot 10^{-3}}} = 49 \text{ [nF]}$$

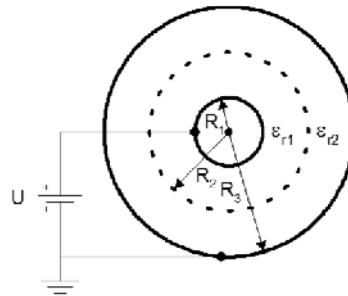


Po etna stranica

5. zadatak

Kuglasti kondenzator s dva sloja dielektrika priključen je na napon U prema slici. Odredite polumjer granične površine (R_2) da bi na oba sloja vladao jednak napon. Koliki se najveći napon može priključiti na takav kondenzator a da ne dođe do proboja. Nacrtajte dijagrame promjene potencijala i iznosa vektora jakosti el. polja u zavisnosti o udaljenosti r od središta kondenzatora, $\varphi(r)$, $E(r)$, s karakterističnim vrijednostima polja i potencijala za taj slučaj. Zadano:

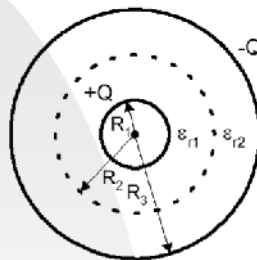
- $\epsilon_{r1} = 4$
- $\epsilon_{r2} = 2$
- $R_1 = 1$ [cm]
- $R_3 = 6$ [cm]
- $E_{1P} = 200$ [kV/m]
- $E_{2P} = 75$ [kV/m]



Početna stranica

Uvodni pojmovi

- Kuglasti kondenzator s dva dielektrika (serija):



$$E_1(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot r^2}; E_2(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot r^2}$$

$$D_1(R_2) = D_2(R_2)$$

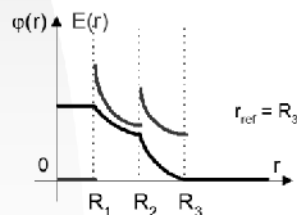
$$C_1 = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}; C_2 = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_3 - R_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$U_{R1R2} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$U_{R2R3} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$W = W_1 + W_2$$



El. polje i potencijal izgledaju kao na slici:

Početna stranica

Stranica:III- 21

Rješenje zadatka

- Napon na prvom i drugom dielektriku su jednaki:

$$U_{R1R2} = U_{R2R3}$$

$$\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$\frac{1}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$R_2 = \frac{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) \cdot R_1 \cdot R_3}{\epsilon_{r1} \cdot R_1 + \epsilon_{r2} \cdot R_3}$$

$$R_2 = \frac{(4 + 2) \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}$$

$$\boxed{R_2 = 2.25 \text{ [cm]}}$$



- Maksimalno polje u prvom dielektriku je na mjestu R_1 , a u drugom na mjestu R_2 .

Po etna stranica

Stranica:III- 22

- Pretpostavimo da je u prvom dielektriku el. polje jednako probojnom polju:

$$E_{1m}(R_1) = E_{1p} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot R_1^2}$$

- Uz takvo polje provjeravamo koliko je polje na granici (R_2) u drugom dielektriku:

$$D_1(R_2) = D_2(R_2)$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_1(R_2) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_2(R_2)$$

$$E_2(R_2) = E_1(R_2) \cdot \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}$$

- El. polje u prvom dielektriku na granici (R_2) iznosi:

$$E_1(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot R_2^2} = E_{1p} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

- Uvrštavanjem poznatih vrijednosti el. polje drugom dielektriku na granici iznosi:

$$E_2(R_2) = E_{1p} \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} = 200 \cdot \left(\frac{2.25}{1} \right)^2 \cdot \frac{4}{2} = 79 \text{ [kV/m]} > E_{2p}$$



Po etna stranica

Stranica:III- 23

- Uz maksimalno polje u prvom dielektriku, u drugom bi došlo do proboja.
- Ukoliko je pak u drugom dielektriku polje jednako probojnom u prvom dielektriku polje iznosi:

$$E_{2m}(R_2) = E_{2p} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot R_2^2}$$

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_1(R_2) = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_2(R_2)$$

$$E_1(R_2) = E_{2p} \cdot \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$$

$$E_1(R_1) = E_{2p} \cdot \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = 75 \cdot \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{2,25}{1}\right)^2 = 190 [\text{kV/m}] < E_{1p}$$

- Maksimalni napon određuje se:

$$U_{\max} = U_{R1R2} + U_{R2R3} = \frac{Q_{\max}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q_{\max}}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

- Količina naboja na kuglama može se odrediti kao:

$$Q_{\max} = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot R_2^2 \cdot E_{2p}$$

Po etna stranica



Stranica:III- 24

$$U_{\max} = \frac{\epsilon_{r2} \cdot R_2^2 \cdot E_{2p}}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\epsilon_{r2} \cdot R_2^2 \cdot E_{2p}}{\epsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$U_{\max} = \frac{\epsilon_{r2} \cdot R_2^2 \cdot E_{2p}}{\epsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + R_2^2 \cdot E_{2p} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

- Uvrštenjem poznatih vrijednosti dobijemo maksimalni napon:

$$U_{\max} = 2.1 [\text{kV}]$$

- Za el. polje znamo sljedeće:

$$E_1(R_1) = 190 [\text{kV/m}]$$

$$E_2(R_2) = 75 [\text{kV/m}]$$

$$E_1(R_2) = E_{2p} \cdot \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} = 75 \cdot \frac{2}{4} = 37.5 [\text{kV/m}]$$

$$E_2(R_3) = E_{2p} \cdot \left(\frac{R_2}{R_3}\right)^2 = 75 \cdot \left(\frac{2,25}{6}\right)^2 = 10.5 [\text{kV/m}]$$

Po etna stranica

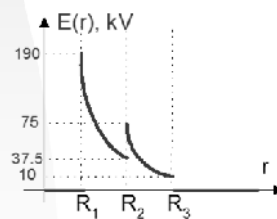


Stranica:III- 25

- Pomo u izra unatih vrijednosti polja mogu se odrediti funkcije promjene el. polja, $E(r)$:

$$E(r) = \begin{cases} 0; & \text{za } 0 < r < R_1 \\ \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot r^2}; & \text{za } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot r^2}; & \text{za } R_2 < r < R_3 \\ 0; & \text{za } r > R_3 \end{cases}$$

- Dijagram promjene jakosti el. polja:



Budu i da Q nije zadan, on se može odrediti kao:

$$Q = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot R_2^2 \cdot E_{2p}$$



Po etna stranica

Stranica:III- 26

- Dijagram potencijala odredimo uz referentnu točku na udaljenosti R_3 (pogledati sliku).

$$\varphi_{ref} = \varphi(R_3) = 0$$

- Potencijal u drugom dielektriku, za $R_2 < r < R_3$, se mijenja kao:

$$\varphi(r) = U_{rR_3} + \varphi(R_3) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot R_3} + 0$$

$$\varphi(R_2) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot R_2} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 1.05 \text{ [kV]}$$

- Potencijal u prvom dielektriku:

$$\varphi(r) = U_{rR_2} + \varphi(R_2) = U_{rR_2} + U_{R_2R_3} + \varphi(R_3)$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot R_2} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right)$$

$$\varphi(R_1) = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1}} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2}} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 2.1 \text{ [kV]}$$



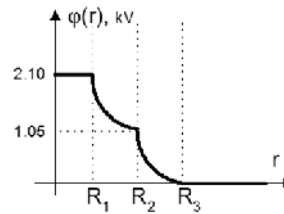
Po etna stranica

Stranica:III- 27

- Potencijal, $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right); & \text{za } 0 < r < R_1 \\ \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot R_2} + \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2}} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right); & \text{za } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot r} - \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot R_3}; & \text{za } R_2 < r < R_3 \\ 0; & \text{za } r > R_3 \end{cases}$$

- Dijagram promjene potencijala:

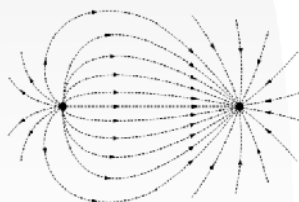


Po etna stranica

Stranica: IV-1

Elektrostatika

- Spojevi kondenzatora.

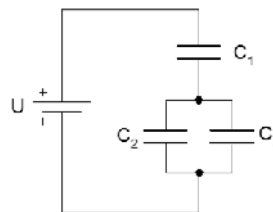


Stranica: IV-2

1. zadatak

Na kondenzatorsku mrežu na slici priključen je izvor napajanja koji daje istosmjerni napon od 1200 [V]. Potrebno je odrediti ekvivalentni (ukupni) kapacitet mreže, napone koji vladaju na pojedinim elementima (kondenzatorima) kao i pripadne naboje. Zadano je:

- $C_1 = 4 \text{ } [\mu\text{F}]$
- $C_2 = 6 \text{ } [\mu\text{F}]$
- $C_3 = 2 \text{ } [\mu\text{F}]$
- $U = 1200 \text{ } [\text{V}]$



Po etna stranica



Stranica: IV-3

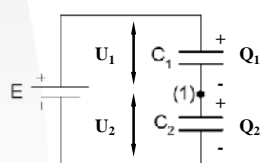
Uvodni pojmovi

- Priključenjem skupine kondenzatora na istosmjerni izvor (ili izvore) električne energije uspostavljaju se naponske i nabojne prilike na pojedinim kondenzatorima u skladu s dva osnovna zakona i to:

$$\text{alg} \sum_i Q_{i,\text{kon}} = \text{alg} \sum_i Q_{i,\text{poč}} \quad \text{za svaki čvor}$$

$$\text{alg} \sum_j E_j = \text{alg} \sum_i \frac{Q_i}{C_i} \quad \text{za svaku konturu}$$

- U slučaju **serijskog** spoja dva prethodno nenabijena kondenzatora vrijedi:



$$E = U_1 + U_2$$

$$\text{za čvor (1)} \quad -Q_1 + Q_2 = 0$$

$$C_{12} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)^{-1}$$



Po etna stranica



Stranica: IV-4

Uvodni pojmovi

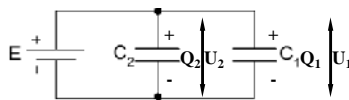
- Za seriju prethodno nenabijenih kondenzatora općenito vrijedi:

$$U_S = \sum_{i=1}^n U_i$$

$$Q_S = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

- U slučaju **paralelnog** spoja dva prethodno nenabijena kondenzatora vrijedi:



$$U_{12} = U_1 = U_2$$

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2$$

$$C_{12} = C_1 + C_2$$

- Za paralelu prethodno nenabijenih kondenzatora općenito vrijedi:

$$U_P = U_1 = U_2 = \dots = U_n$$

$$Q_P = \sum_{i=1}^n Q_i$$

$$C_P = \sum_{i=1}^n C_i$$



Po etna stranica



Stranica: IV-5

Rješenje

- Ukupni (ekvivalentni) kapacitet mreže:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 6 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 10^{-6} = 8 \cdot 10^{-6} = 8 [\mu\text{F}]$$

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} \right)^{-1} = \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{8 \cdot 10^{-6}} \right)^{-1} = 2.67 \cdot 10^{-6} = 2.67 [\mu\text{F}]$$

- Naponi na kondenzatorima:

$$Q_1 = Q_{23} = Q = C \cdot U$$

$$U_1 = U \cdot \frac{C}{C_1} = 1200 \cdot \frac{2.67 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 800 [\text{V}]$$

$$U_{23} = U \cdot \frac{C}{C_{23}} = 1200 \cdot \frac{2.67 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}} = 400 [\text{V}]$$

$$U_2 = U_3 = U_{23} = 400 [\text{V}]$$



Po etna stranica



Stranica: IV-6

- Naboji na kondenzatorima:

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 800 = 3.2 \cdot 10^{-3} [\text{C}]$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_2 = 6 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 2.4 \cdot 10^{-3} [\text{C}]$$

$$Q_3 = C_3 \cdot U_3 = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 0.8 \cdot 10^{-3} [\text{C}]$$



Po etna stranica

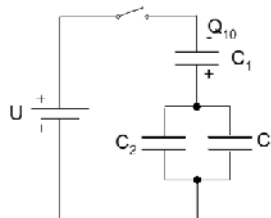


Stranica: IV-7

2. zadatak

Na kondenzatorsku mrežu priključe se izvor napajanja koji daje istosmjerni napon od 1200 [V]. Potrebno je odrediti napone koji vladaju na pojedinim elementima (kondenzatorima) kao i pripadne naboje, ako je kondenzator C_1 prethodno nabijen nabojem Q_{10} prikazanog polariteta. Zadano je:

- $C_1 = 4 [\mu\text{F}]$
- $C_2 = 6 [\mu\text{F}]$
- $C_3 = 2 [\mu\text{F}]$
- $Q_{10} = 1 [\text{mC}]$
- $U = 1200 [\text{V}]$



Po etna stranica

Stranica: IV-8

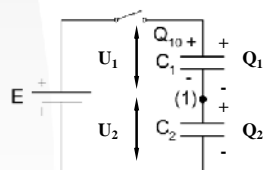
Uvodni pojmovi

- Priključe ivanjem skupine kondenzatora na istosmjerni izvor (ili izvore) elektri ne energije uspostavljaju se naponske i nabojske prilike na pojedinim kondenzatorima u skladu s dva osnovna zakona i to:

$$\text{alg} \sum_i Q_{i,\text{kon}} = \text{alg} \sum_i Q_{i,\text{poč}} \quad \text{za svaki čvor}$$

$$\text{alg} \sum_j E_j = \text{alg} \sum_i \frac{Q_i}{C_i} \quad \text{za svaku konturu}$$

- U slu aju priklju enja **serijskog** spoja dva kondenzatora na istosmjerni izvor, pri emu je prije toga kondenzator C_1 nabijen na Q_{10} , vrijedi:



$$E = U_1 + U_2$$

za čvor (1) $-Q_1 + Q_2 = -Q_{10}$

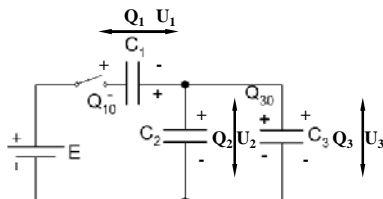


Po etna stranica

Stranica: IV-9

Uvodni pojmovi

- U slučaju priključivanja na izvor istosmjernog napajanja **serijsko-paralelnog** spoja tri kondenzatora, gdje su oba kondenzatora prethodno nabijena prema slici vrijedi:



$$U_2 = U_3 = U_{23}$$

$$E = U_1 + U_{23}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \quad U_3 = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$-Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{10} + Q_{30}$$



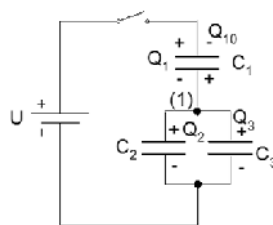
Po etna stranica



Stranica: IV-10

Rješenje

- Nakon zatvaranja sklopke u mreži se kondenzatori nakon nekog vremena nabiju nabožima prikazanim na slici:



- Za mrežu vrijedi:

$$\text{za čvor (1)} \quad -Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_{10}$$

$$U_2 = U_3 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$$

$$U = U_1 + U_{23} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_3}{C_3}$$



Po etna stranica



Stranica: IV-11

- Rješenjem sustava tri jednadžbe s tri nepoznanice i uvrštenjem poznatih vrijednosti kona ni naboji na kondenzatorima iznose:

$$Q_1 = 2.86 \text{ [mC]}$$

$$Q_2 = 2.90 \text{ [mC]}$$

$$Q_3 = 0.96 \text{ [mC]}$$

- Naponi na kondenzatorima:

$$U_2 = U_3 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = 480 \text{ [V]}$$

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 720 \text{ [V]}$$



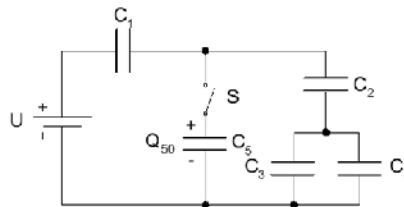
Po etna stranica

Stranica: IV-12

3. zadatak

U mreži prema slici kondenzator C_5 ima po etni naboj Q_{50} nazna enog predznaka. Koliku e promjenu napona ΔU_1 na kondenzatoru C_1 uzrokovati zatvaranje sklopke S? Zadano:

- $C_1 = 18 \text{ [\mu F]}$
- $C_2 = 20 \text{ [\mu F]}$
- $C_3 = 14 \text{ [\mu F]}$
- $C_4 = 16 \text{ [\mu F]}$
- $C_5 = 5 \text{ [\mu F]}$
- $U = 12 \text{ [V]}$

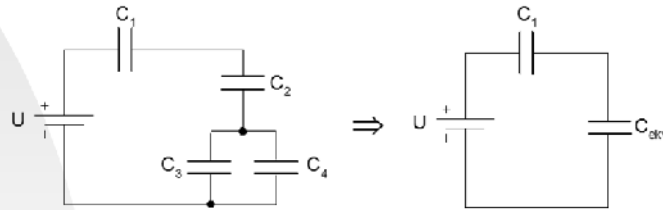


Po etna stranica

Stranica: IV-13

Rješenje zadatka

- Mreža prije zatvaranja sklopke može se pojednostaviti (kondenzatori nisu prethodno nabijeni):



$$\frac{1}{C_{ekv}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}$$

$$C_{ekv} = \frac{C_2 \cdot (C_3 + C_4)}{C_2 + C_3 + C_4} = 12 [\mu\text{F}]$$

- Budu i da kondenzatori nisu prethodno nabijeni vrijedi:

$$Q_{10} = Q_{ekv0}$$

$$U = U_{C10} + U_{C_{ekv}0} = \frac{Q_{10}}{C_1} + \frac{Q_{ekv0}}{C_{ekv}}$$

Po etna stranica

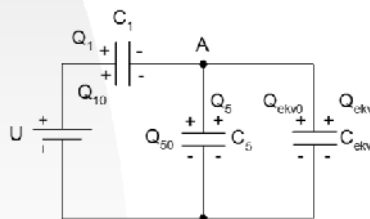


Stranica: IV-14

$$Q_{10} = \frac{U \cdot C_1 \cdot C_{ekv}}{C_1 + C_{ekv}} = \frac{12 \cdot 18 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 10^{-6}}$$

$$Q_{10} = 86.4 [\mu\text{C}]$$

- Prije zatvaranja sklopke kondenzatori C_1 i C_{ekv} su nabijeni po etnim nabojem Q_{10} , a kondenzator C_5 nabojem Q_{50} prikazanih polariteta.



Za mrežu nakon zatvaranja sklopke vrijedi:

za čvor (A)

$$-Q_1 + Q_5 + Q_{ekv} = -Q_{10} + Q_{50} + Q_{ekv0}$$

$$-Q_1 + Q_5 + Q_{ekv} = Q_{50}$$

$$U_{C5} = U_{C_{ekv}} \Rightarrow \frac{Q_5}{C_5} = \frac{Q_{ekv}}{C_{ekv}}$$

$$U = U_{C1} + U_{C5} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_5}{C_5}$$

Po etna stranica



Stranica: IV-15

- Rješenjem sustava tri jednadžbe dobije se Q_5 :

$$Q_5 = \frac{Q_{50} + U \cdot C_1}{\frac{C_1}{C_5} + 1 + \frac{C_{ekv}}{C_5}} = \frac{36 \cdot 10^{-6} + 12 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{\frac{18}{5} + 1 + \frac{12}{5}}$$

$$Q_5 = 36 [\mu\text{As}]$$

- Napon na C_5 :

$$U_{C5} = \frac{Q_5}{C_5} = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6}} = 7.2 [\text{V}]$$

- Prije zatvaranja sklopke kondenzatori C_1 nabijen je na napon U_{C10} :

$$U_{C10} = \frac{Q_{10}}{C_1} = \frac{86.4 \cdot 10^{-6}}{18 \cdot 10^{-6}} = 4.8 [\text{V}]$$

- Nakon zatvaranja sklopke kondenzator C_1 nabijen je na napon U_{C1} :

$$U_{C1} = U - U_{C5} = 12 - 7.2 = 4.8 [\text{V}]$$

- Razlika napona na C_1 prije i poslije zatvaranja sklopke:

$$\Delta U = U_{C1} - U_{C10} = 4.8 - 4.8 = 0 [\text{V}]$$



Po etna stranica

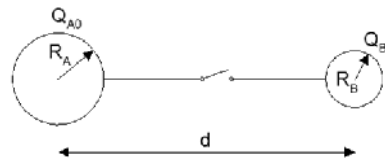


Stranica: IV-16

4. zadatak

Središta dviju usamljenih metalnih kugli A i B polumjera R_A i R_B razmaknuta su d metara, s tim da je $d \gg R_A$. Na kugle su dovedeni naboji Q_{A0} i Q_{B0} , a nakon toga one se me usobno povezuju vrlo tankom metalnom niti. Odredite, za taj slučaj, iznose polja E_A i E_B tik uz površinu kugli ako je $\epsilon = \epsilon_0$.

- $R_A = 9 [\text{cm}]$
- $R_B = 1 [\text{cm}]$
- $Q_{A0} = -2.4 [\text{nC}]$
- $Q_{B0} = +3.2 [\text{nC}]$



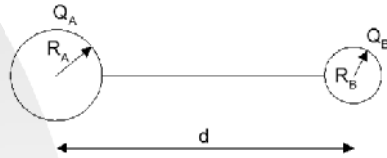
Po etna stranica



Stranica: IV-17

Rješenje zadatka

- Nakon zatvaranja sklopke potencijali kugli se izjednačavaju (dolazi do preraspodjele naboja):

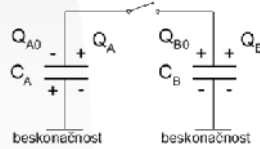


$$\varphi_A = \varphi_B$$

Uz referentnu točku u beskonačnosti:

$$\frac{Q_A}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_A} = \frac{Q_B}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_B}$$

- Kugle i sklopke prikazane na slici, za koji vrijedi:



$$-Q_{A0} + Q_{B0} = Q_A + Q_B$$

Po etna stranica



Stranica: IV-18

- Rješenjem sustava jednačini:

$$Q_B = Q_A \frac{R_B}{R_A}$$

$$Q_A = \frac{-Q_{A0} + Q_{B0}}{1 + \frac{R_B}{R_A}} = \frac{-2.4 \cdot 10^{-9} + 3.2 \cdot 10^{-9}}{1 + \frac{1}{9}}$$

$$Q_A = 720 \text{ [pAs]}$$

$$Q_B = 80 \text{ [pAs]}$$

- Budući da je $d \gg R_A$ el. polja nakon zatvaranja sklopke iznose:

$$E_A = \frac{Q_A}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_A^2} = \frac{720 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (9 \cdot 10^{-2})^2} = 800 \text{ [V/m]}$$

$$E_B = \frac{Q_B}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R_B^2} = \frac{80 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot \pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2} = 7.2 \text{ [kV/m]}$$



Po etna stranica

